V001

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 3x + 2 = 0$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

5p **b)** Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$.

5p **c)** Să se calculeze valoarea determinantului d.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

5p **a)** Să se verifice că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $x \circ (-4)$, unde x este număr real.

5p **c)** Știind că operația „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009$.

① a) $x^3 - 3x + 2 = 0$; $a = 1$; $b = 0$; $c = -3$; $d = 2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -3 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -2 \end{cases}$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

b) $$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1 + 2 = 0 \\ x_2^3 - 3x_2 + 2 = 0 \\ x_3^3 - 3x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{} + 6 = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$

c) $d = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_2+x_3+x_1 & x_3 & x_1 \\ x_3+x_1+x_2 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$

② a) $(x+4)(y+4) - 4 = xy + 4x + 4y + 16 - 4 = xy + 4x + 4y + 12 = x \circ y, \forall x,y \in \mathbb{R}$

b) $x \circ (-4) = (x+4)(-4+4) - 4 = -4, \forall x \in \mathbb{R}$

c) $(-2009) \circ (-2008) \circ \dots \circ 2008 \circ 2009 = -4$ (din b, $x \circ (-4) = -4, \forall x \in \mathbb{R}$)

V002

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$, $b=1$ și $c=-1$, să se calculeze determinantul d.

5p **b)** Să se verifice că $d=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=11$.

5p **c)** Știind că operația "$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

① a) $d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=8+1-1+2+2+2=\underline{\underline{14}}$

b) $d=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}=$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab)=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-$

$-2ab-2ac-2bc)=\frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2)=$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(2^x+3^x+5^x)[(2^x-3^x)^2+(2^x-5^x)^2+(3^x-5^x)^2]$ (din b)

$\frac{1}{2}(2^x+3^x+5^x)[(2^x-3^x)^2+(2^x-5^x)^2+(3^x-5^x)^2]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-3^x=0 \\ 2^x-5^x=0 \\ 3^x-5^x=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^x=3^x=5^x \Leftrightarrow \underline{x=0}$

② a) $2(x-3)(y-3)+3=2xy-6x-6y+18+3=2xy-6x-6y+21=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $2(x-3)(x-3)+3=11$; $\quad 2(x-3)^2=8 \Rightarrow (x-3)^2=4 \Rightarrow x-3=\pm 2$

$x-3=2 \Rightarrow x_1=5$

$x-3=-2 \Rightarrow x_2=1$

$\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1 \end{cases}$

c) $x\circ 3=2(x-3)(3-3)+3=3,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}=3$ pt că $x\circ 3=3,\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\sqrt{9}=3$

V003

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - 2x = 0$.

5p a) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.

5p b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

5p c) Să se calculeze determinantul d.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f = X^4 + aX^3 - 28X^2 + bX + 96$, $g = X^2 + 2X - 24$ și $h = (X^2 + 2X - 24)(X^2 - 4)$.

5p a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele f și h să fie egale.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$.

① a) $x^3 - 2x = 0 \quad a = 1;\ b = 0;\ c = -2;\ d = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -2 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = 0 \end{cases} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

b) $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{-2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

c) $d = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_2+x_3+x_1 & x_3 & x_1 \\ x_3+x_1+x_2 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$

② a) $h = (x^2 + 2x - 24)(x^2 - 4) = x^4 + 2x^3 - 24x^2 - 4x^2 - 8x + 96 =$

$= x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 8x + 96$

b) $f = h \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$ din a)

c) $2^{4x} + 2 \cdot 2^{3x} - 28 \cdot 2^{2x} + 96 = 0 \qquad 2^x = t > 0$

$t^4 + 2t^3 - 28t^2 + 96 = 0$

$(t^2 + 2t - 24)(t^2 - 4) = 0$ (din a)

$t^2 + 2t - 24 = 0$

$\Delta = 4 + 96 = 100;\ t_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = \Big\langle$ $t_1 = -6 < 0$, nu convine; $t_2 = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

$t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t_{3,4} = \pm 2 \Big\langle$ $t_3 = -2 < 0$, nu convine; $t_4 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x_2 = 1$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

V004

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice dacă $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$, oricare ar fi numerele $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze suma $X(1)+X(2)+X(3)+...+X(2009)$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuații $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

① a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-12 & -24+18\\ 8-6 & -12+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=A$

$A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A^2=A \qquad A^3=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2^2+aI_2A+bI_2A+abA^2=$
$=I_2+aA+bA+abA=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab),$
$\forall a,b\in\mathbb{R}$

c) $X(1)+X(2)+X(3)+\dots+X(2009)=(I_2+A)+(I_2+2A)+(I_2+3A)+\dots$
$\dots+(I_2+2009A)=2009I_2+(1+2+3+\dots+2009)A=2009I_2+$
$+\frac{2009(1+2009)}{2}A=2009I_2+2009\cdot 1005A=2009(I_2+1005A)=$
$=2009\cdot X(1005)$

② a) $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\} \qquad \hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}\ |+\hat{1};\ \hat{2}x=\hat{2} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\hat{1}\\ x_2=\hat{4}\end{cases}$

b) $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{1}+\hat{2}+\hat{3} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2}+\hat{3}+\hat{1} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3}+\hat{1}+\hat{2} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{0} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}=\hat{0}$

c) $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\ |+\hat{4}x\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\hat{4}x+\hat{4}\\ x+\hat{2}(\hat{4}x+\hat{4})=\hat{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\hat{4}x+\hat{4}\\ x+\hat{2}x+\hat{2}=\hat{5}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\hat{4}x+\hat{4}\\ \hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}\ |+\hat{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\hat{4}x+\hat{4}\\ \hat{3}x=\hat{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\hat{1}\\ x_2=\hat{3}\\ x_3=\hat{5}\end{cases}$

$y=\hat{4}x+\hat{4}$

$\begin{cases}x_1=\hat{1}\\ y_1=\hat{4}\cdot\hat{1}+\hat{4}=\hat{2}\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=\hat{3}\\ y_2=\hat{4}\cdot\hat{3}+\hat{4}=\hat{4}\end{cases} \quad \begin{cases}x_3=\hat{5}\\ y_3=\hat{4}\cdot\hat{5}+\hat{4}=\hat{0}\end{cases}$

$\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine x real, știind că $\det(A)=0$.

5p b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.

5p c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că $x\circ 2=2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p c) Știind că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2009$.

(1) a) $\det(A)=\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix}=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$

$\det(A)=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$; $\Delta=36-32=4$; $x_{1,2}=\frac{6\pm2}{2}=\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=2 \end{cases}$

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x-3)^2+1 & x-3+x-3 \\ x-3+x-3 & 1+(x-3)^2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}$ (1)

$(2x-6)A-(x^2-6x+8)I_2=2\begin{pmatrix} (x-3)^2 & x-3 \\ x-3 & (x-3)^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x^2-6x+8 & 0 \\ 0 & x^2-6x+8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2x^2-12x+18 & 2x-6 \\ 2x-6 & 2x^2-12x+18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x^2-6x+8 & 0 \\ 0 & x^2-6x+8 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}$ (2) din (1) și (2) $\Rightarrow A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)I_2$

c) $A^2=2A \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+10=2x-6 \\ 2x-6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+16=0 \\ 2x=8 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=4}$

(2) a) $(x-2)(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=xy-2(x+y)+6=x\circ y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x\circ 2=(x-2)(2-2)+2=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

c) $(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2009=2$ pt că $x\circ 2=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

V. 006

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2^n)$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puţin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

5p **c)** Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră mulţimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se verifice că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **b)** Ştiind că mulţimea G împreună cu operaţia de înmulţire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{Z}\to G$, $f(x)=A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$.

① a) $O(0;0)$; $A_1(1;2)$ $A_2(2;4)$ $\begin{vmatrix}0&0&1\\1&2&1\\2&4&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&0&1\\1&1&1\\2&2&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow O; A_1; A_2$ - coliniare

b) $A_0(0;1)$

$O; A_1; A_2$ - coliniare

OA_0; A_0A_1; A_0A_2; OA_1 - 4 drepte

c) $\mathcal{A}_{A_nA_{n+1}A_{n+2}}=\frac{1}{2}|\Delta|$ $\quad \Delta=\begin{vmatrix}n&2^n&1\\n+1&2^{n+1}&1\\n+2&2^{n+2}&1\end{vmatrix}=$

$=2^n\begin{vmatrix}n&1&1\\n+1&2&1\\n+2&4&1\end{vmatrix}=2^n(2n+4n+4+n+2-2n-4-4n-n-1)=$

$=2^n$ $\quad \mathcal{A}_{A_nA_{n+1}A_{n+2}}=\frac{1}{2}\cdot 2^n=2^{n-1}$

② a) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x+y&0&1\end{pmatrix}=A_{x+y}$; $x,y\in\mathbb{Z}$

b) $A_x\cdot A_e=A_e\cdot A_x=A_x \Rightarrow x+e=x \Rightarrow e=0$

$A_e=A_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

c) Dacă $f(x)=f(y)\Rightarrow A_x=A_y \Rightarrow x=y \Rightarrow f$ injectivă ①

$f(x+y)=A_{x+y}=A_x\cdot A_y=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ ②

din ① şi ② $\Rightarrow f$ morfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(G,\cdot)$

V 007

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze matricea B^2, unde $B^2=B\cdot B$.

5p **b)** Să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $C^4=6^4\cdot I_2$, unde $C=B^2+A^{-1}$ și $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Fie polinoamele $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ și $g=X+\hat{3}$ din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

5p **b)** Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

1 a) $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&2+2\\1+1&2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}=A$

b) $\det A=\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}=9-8=1$ $\quad {}^tA=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$ $\quad A^*=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}$

c) $C=B^2+A^{-1}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}=6\hat{I}_2$

$C^4=(6\hat{I}_2)^4=6^4\hat{I}_2$

2 a) $-\hat{3}=\widehat{5-3}=\hat{2}$

	X^3	X^2	X^1	X^0
	$\hat{1}$	a	$\hat{1}$	$\hat{1}$
$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{2}+a$	$\hat{2}a$	$\boxed{\hat{4}a+\hat{1}}$

$r=\hat{4}a+\hat{1}$

$g\mid f \Rightarrow r=\hat{0}$ $\quad \hat{4}a+\hat{1}=\hat{0};\ \hat{4}a=-\hat{1};\ \hat{4}a=\hat{4}\Rightarrow a=\hat{1}$

b) $a=\hat{1};\ f=X^3+X^2+X+\hat{1}=X^2(X+\hat{1})+(X+\hat{1})=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$

c) $a=\hat{1};\ f(x)=\hat{0}\Rightarrow(x+\hat{1})(x^2+\hat{1})=\hat{0}$

$x+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow x_1=-\hat{1}=\widehat{5-1}=\hat{4}$

$x^2+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow x^2=-\hat{1};\ x^2=\hat{4}\Rightarrow\begin{cases}x_2=\hat{2}\\x_3=\hat{3}\end{cases}$

$x\in\{\hat{2};\hat{3};\hat{4}\}$

V. 008

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Definim matricele $A=X\cdot Y^t$ și $B(a)=aA+I_3$, unde $a\in\mathbb{R}$ și Y^t este transpusa matricei Y.

5p a) Să se arate că matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&4&-6\\3&6&-9\end{pmatrix}$.

5p b) Să se calculeze determinantul matricei A.

5p c) Să se arate că matricea $B(a)$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=(\hat{3}a+\hat{3}b)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ și $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

5p a) Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât cele două polinoame să fie egale.

5p b) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se calculeze în $\mathbb{Z}_5$ suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

5p c) Pentru $a=b=\hat{2}$ să se rezolve în $\mathbb{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

① a) $Y^t=(1\ \ 2\ \ -3)$ $\quad A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(1\ \ 2\ \ -3)=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&4&-6\\3&6&-9\end{pmatrix}$

b) $\det A=2\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&2&-6\\3&3&-9\end{vmatrix}=0$

c) $B(a)=\begin{pmatrix}a&2a&-3a\\2a&4a&-6a\\3a&6a&-9a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&2a&-3a\\2a&4a+1&-6a\\3a&6a&-9a+1\end{pmatrix}$

$\det B(a)=\begin{vmatrix}a+1+2a-3a&2a&-3a\\2a+4a+1-6a&4a+1&-6a\\3a+6a-9a+1&6a&-9a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2a&-3a\\1&4a+1&-6a\\1&6a&-9a+1\end{vmatrix}=$

$=(4a+1)(-9a+1)-12a^2-18a^2+3a(4a+1)+36a^2-2a(-9a+1)=-4a+1$

$\det B(a)\neq 0\Rightarrow -4a+1\neq 0\Rightarrow a\neq\frac{1}{4}$; $B(a)$ inversabilă $\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{4}\}$

② a) $f=g\Rightarrow\begin{cases}\hat{3}a+\hat{3}b=\hat{2}\\\hat{2}a+\hat{3}b=\hat{3}a+\hat{2}b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{3}a+\hat{3}b=\hat{2}\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\\hat{3}\cdot\hat{2}a=\hat{2}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a=\hat{2}\end{cases}\Leftrightarrow \underline{a=b=\hat{2}}$

b) $f=\hat{2}x^2+\hat{2}x$
$f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})=\hat{0}+\hat{4}+\hat{2}+\hat{4}+\hat{0}=\hat{0}$

c) $f(x)=\hat{0}\Rightarrow\hat{2}x^2+\hat{2}x=\hat{0}$; $\hat{2}x(x+\hat{1})=\hat{0}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\hat{0}\\x+\hat{1}=0\Rightarrow x_2=-\hat{1}=\hat{4}\end{cases}$

V 009

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele întregi a, b, c, d astfel încât $A+2I_2=O_2$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei $B=A-A^t$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $A+A^t=2I_2$, atunci determinantul matricei $A-A^t$ este un număr divizibil cu **4**.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=x$.

5p **c)** Să se determine două numere $a,b\in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in \mathbb{N}$.

① a) $\begin{pmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-2 \end{cases}$

b) $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$

$\det B = 0-(b-c)(c-b)=(c-b)^2$

c) $A+A^t=\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=d=1 \\ b=-c \end{cases}$

$A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2b & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A-A^t)=4b^2 \,\vdots\, 4$

② a) $x\circ e=e\circ x=x$; $(x-4)(e-4)+4=x$; $(x-4)(e-4)=x-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow e-4=1 \Rightarrow e=5$

b) $(x\circ x)\circ x=\left[(x-4)^2+4\right]\circ x=\left[(x-4)^2+4-4\right](x-4)+4=(x-4)^3+4$

$(x-4)^3+4=x$; $(x-4)^3=x-4$; $(x-4)^3-(x-4)=0$

$(x-4)(x^2-8x+15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x_1=4 \\ x^2-8x+15=0 \Rightarrow \begin{cases} x_2=3 \\ x_3=5 \end{cases} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=4 \\ x_2=3 \\ x_3=5 \end{cases}$

c) $a\circ b=(a-4)(b-4)+4$.

$a-4=\frac{2}{5} \Rightarrow a=4+\frac{2}{5}=\frac{22}{5}$ $a\circ b=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}+4=5\in\mathbb{N}$

$b-4=\frac{5}{2} \Rightarrow b=4+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$

V. 010

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. Se notează $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2+A^3=O_2$.

5p **c)** Să se calculeze suma $A+2\cdot A^2+\ldots+10\cdot A^{10}$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=(X-1)^{10}+(X-2)^{10}$ și $g=X^2-3X+2$.

5p **a)** Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

① a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6+6=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-6 & -12+18\\ 2-3 & -6+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}=-A$

$A^3=A^2\cdot A=-A\cdot A=-A^2=-(-A)=A$

$A^2+A^3=-A+A=O_2$

c) $A+2A^2+\ldots+10A^{10}=A-2A+3A-4A+5A-6A+7A-8A+9A-10A=$

$=(1-2)A+(3-4)A+\ldots+(9-10)A=-5A=\begin{pmatrix}-10 & 30\\ -5 & 15\end{pmatrix}$

② a) $g=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=(x-2)(x-1)$

b) $f(2)=(2-1)^{10}+(2-2)^{10}=1\neq 0 \Rightarrow x-2\nmid f$
$f(1)=(1-1)^{10}+(1-2)^{10}=1\neq 0\Rightarrow x-1\nmid f$ $\Big\} \Rightarrow g\nmid f$

c) $f=g\,q+r$; $\quad$ grad $r<$ grad $g\Rightarrow$ grad $r\leq 1$

$r=ax+b$

$f=(x-2)(x-1)q+ax+b$

$f(2)=2a+b=1$

$f(1)=a+b=1$

$\begin{cases}2a+b=1\\ a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=1\\ -a-b=-1\end{cases}$

$a=0$

$b=1$

$\boxed{r=1.}$

V011

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $U=(0\ \ 0)$, $X=(x\ \ y)$ și $V=\begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix}$ cu $v,x,y\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se arate că dacă $X\cdot V=U$, atunci $x\cdot(v^2-9)=0$.

5p b) Să se determine valorile reale ale numărului v pentru care determinantul matricei V este nenul.

5p c) Să se determine trei soluții distincte ale sistemului de ecuații $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 9x+3y=0 \end{cases}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=\sqrt[3]{x^3+y^3-1}$.

5p a) Să se demonstreze că $x\circ(-x)=-1$, oricare ar fi x real.

5p b) Să se arate că legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p c) Să se calculeze $(-4)\circ(-3)\circ\ldots\circ 3\circ 4$.

① a) $X\cdot V=(x\ y)\begin{pmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{pmatrix}=(xv+y\quad 9x+vy)=(0;0)$

$\begin{cases} xv+y=0 \\ 9x+vy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-xv \\ 9x+(-xv)\cdot v=0 \end{cases} \Rightarrow -x(v^2-9)=0 \Rightarrow \underline{x(v^2-9)=0}$

b) $\det V=\begin{vmatrix} v & 9 \\ 1 & v \end{vmatrix}=v^2-9$; $v^2-9\neq 0 \Rightarrow v\neq \pm 3$; $\underline{v\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}}$

c) $\begin{cases} 3x+y=0 \\ 9x+3y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ y=-3\alpha \end{cases}$ $S=\{(\alpha;-3\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$

$\alpha=0;\ \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$ $\alpha=1;\ \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-3 \end{cases}$ $\alpha=2;\ \begin{cases} x_3=2 \\ y_3=-6 \end{cases}$

② a) $x\circ(-x)=\sqrt[3]{x^3+(-x)^3-1}=\sqrt[3]{x^3-x^3-1}=-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\left.\begin{array}{l} (x\circ y)\circ z=\sqrt[3]{x^3+y^3-1}\circ z=\sqrt[3]{x^3+y^3-1+z^3-1}=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-2} \\ x\circ(y\circ z)=x\circ\sqrt[3]{y^3+z^3-1}=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-1-1}=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-2} \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

c) $(-4)\circ(-3)\circ\ldots\circ 3\circ 4=[(-4)\circ 4]\circ[(-3)\circ 3]\circ[(-2)\circ 2]\circ[(-1)\circ 1]\circ 0=$

$=(-1)\circ(-1)\circ(-1)\circ(-1)\circ 0=\sqrt[3]{-1-1-1}\circ\sqrt[3]{-1-1-1}\circ 0=$

$=\sqrt[3]{-3}\circ\sqrt[3]{-3}\circ 0=\sqrt[3]{-3-3-1}\circ 0=\sqrt[3]{-7}\circ 0=$

$=\sqrt[3]{-7+0-1}=\sqrt[3]{-8}=-2$

V012

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Se notează cu $X\cdot X=X^2$.

5p **a)** Să se verifice că $A=I_3+B$.

5p **b)** Să se calculeze suma A^2+B^2.

5p **c)** Să se calculeze inversa matricei A^2.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+7(x+y)+42$.

5p **a)** Să se calculeze $\sqrt{2}\circ(-\sqrt{2})$.

5p **b)** Să se verifice că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=x$.

① a) $I_3+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A$

b) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) $\det A^2=1\neq0\Rightarrow\exists(A^2)^{-1}=(A^2)^*$ $\quad {}^tA^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$

$(A^2)^*=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}=(A^2)^{-1}$

② a) $\sqrt{2}\circ(-\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})+7(\sqrt{2}-\sqrt{2})+42=40$

b) $(x+7)(y+7)-7=xy+7(x+y)+49-7=xy+7(x+y)+42=$
$=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

c) $x\circ x\circ x=x$
$(x\circ x)\circ x=[(x+7)(x+7)-7]\circ x=[(x+7)^2-7+7](x+7)-7=$
$=(x+7)^3-7$

$(x+7)^3-7=x\Rightarrow(x+7)^3-(x+7)=0;\ (x+7)((x+7)^2-1)=0$
$x+7=0\Rightarrow x_1=-7$
$(x+7)^2-1=0\Rightarrow x+7=\pm1;\ \begin{cases}x+7=1\Rightarrow x_2=-6\\x+7=-1\Rightarrow x_3=-8\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x_1=-7\\x_2=-6\\x_3=-8\end{cases}$

V013

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}$, unde a este număr real.

5p a) Să se calculeze determinantul $D(9)$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(a)=0$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $D(3^x)=0$.

2. Se consideră mulțimea $M=[k;+\infty)\subset\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$ și operația $x*y=xy-k(x+y)+k^2+k$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $2*3=2$.

5p b) Pentru $k=2$ să se rezolve în M ecuația $x*x=6$.

5p c) Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in M$, rezultă că $x*y\in M$.

① a) $D(9)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 9 & 81\end{vmatrix}=243+9+9-3-81-81=\underline{96}$

b) $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & a & a^2\end{vmatrix}=3a^2+9+a-3-9a-a^2=$
$=2a^2-8a+6=2(a^2-4a+3)$

$a^2-4a+3=0$
$\Delta=16-12=4;\quad a_{1,2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}a_1=1\\ a_2=3\end{cases}$

c) $D(3^x)=0\Rightarrow\begin{cases}3^x=1\Rightarrow x_1=0 & \text{(din b)}\\ 3^x=3\Rightarrow x_2=1.\end{cases}$

② a) $2*3=2\cdot3-k(2+3)+k^2+k=6-5k+k^2+k=k^2-4k+6$
$2*3=2;\ k^2-4k+6=2;\ k^2-4k+4=0;\ (k-2)^2=0\Rightarrow\underline{k=2}$

b) $x*x=x\cdot x-2(x+x)+2^2+2=x^2-4x+4+2=x^2-4x+6$
$\begin{cases}x^2-4x+6=6\\ x\in[2,+\infty)\end{cases};\ \begin{cases}x(x-4)=0\\ x\in[2,+\infty)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\notin[2,+\infty) & \text{nu convine}\\ x_2=4\in[2,+\infty)\end{cases}$
$x=4$ soluție

c) $x,y\in M\Rightarrow\begin{cases}x\geq k\Rightarrow x-k\geq0\\ y\geq k\Rightarrow y-k\geq0\end{cases}\Rightarrow(x-k)(y-k)\geq0\Rightarrow$

$\Rightarrow xy-kx-ky+k^2\geq0\Rightarrow xy-k(x+y)+k^2\geq0\ |+k\Rightarrow$
$\Rightarrow xy-k(x+y)+k^2+k\geq k\Rightarrow x*y\in[k,+\infty)\Rightarrow$
$\Rightarrow x*y\in M,\ \forall x,y\in M$

V014

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2+A.

5p **b)** Știind că $A^n=\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se rezolve ecuația $\det(A^n)=2\cdot 5^n-125$.

5p **c)** Să se determine transpusa matricei $B=A+A^2+\ldots+A^{2009}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+n$, unde $m,n\in\mathbb{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$, știind că polinomul f admite rădăcinile $x_1=0$ și $x_2=1$.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relația $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2$.

5p **c)** Pentru $m=1$ și $n=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

① a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A^2+A=\begin{pmatrix}25&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&0\\0&2\end{pmatrix}$

b) $\det(A^n)=\begin{vmatrix}5^n&0\\0&1\end{vmatrix}=5^n$; $5^n=2\cdot 5^n-125 \Rightarrow 5^n=125 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{n=3}$

c) $B=A+A^2+\ldots+A^{2009}=\begin{pmatrix}5+5^2+\ldots+5^{2009} & 0\\ 0 & \underbrace{1+1+\ldots+1}_{de\ 2009\ ori}\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5\left(\dfrac{5^{2009}-1}{5-1}\right) & 0\\ 0 & 2009\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot\dfrac{5^{2009}-1}{4} & 0\\ 0 & 2009\end{pmatrix}$

② a) $\begin{cases}f(0)=0\\ f(1)=0\end{cases}$ $\begin{cases}n=0\\ 1+m+n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=0\\ m=-1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}=0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\dfrac{c}{a}=m\end{cases}$

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\underbrace{(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_3x_4)}_{m}=0$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-2m$; $-2m=2 \Rightarrow \underline{m=-1}$

c) $f=x^4+x^2+1=x^4+2x^2-x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x)=$
$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

V015

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Să se verifice că $AB = BA$.

5p b) Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2 = A\cdot A$ şi $B^2 = B\cdot B$.

5p c) Să se arate că $C^4 = 5^4\cdot I_2$, unde $C = A+B$ şi $C^4 = C\cdot C\cdot C\cdot C$.

2. Se consideră polinoamele cu coeficienţi raţionali $f = X^4+aX^3+bX^2-5X+6$ şi $g = X^3+X-2$.

5p a) Să se determine $a,b\in\mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

5p b) Pentru $a=-3$ şi $b=1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

5p c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x}-3^{2x+1}+3^x-5+6\cdot 3^{-x}=0$.

(1) a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4 & -2+2\\ 8-8 & -4+4\end{pmatrix}=O_2$

$BA=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4 & 8-8\\ -2+2 & -4+4\end{pmatrix}=O_2$ $\Rightarrow AB=BA=O_2$

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 2+8\\ 2+8 & 4+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}=5A$

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+4 & -8-2\\ -8-2 & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{pmatrix}=5B$

$A^2+B^2=5A+5B=5(A+B)=5\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\right]=5\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5^2 I_2$

c) $C=A+B=5I_2$; $C^4=(5I_2)^4=5^4\cdot I_2$

(2) a)
$$\begin{array}{l|l} x^4+ax^3+bx^2-5x+6 & x^3+x-2 \\ \hline -x^4-x^2+2x & x+a \\ \quad ax^3+(b-1)x^2-3x+6 & \\ \quad -ax^3-ax+2a & \\ \quad (b-1)x^2-(a+3)x+2a+6 & \end{array}$$

$g \mid f \Rightarrow r=0$

$(b-1)x^2-(a+3)x+2a+6=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b-1=0\\ a+3=0\\ 2a+6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3\\ b=+1\end{cases}$

b) $f=g\cdot q+r$

$f=(x-3)(x^3+x-2)=$
$=(x-3)(x-1)(x^2+x+2)$

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	0	1	-2
1	1	1	2	$\boxed{0}$

$g=(x-1)(x^2+x+2)$

c) $3^{3x}-3\cdot 3^{2x}+3^x-5+6\cdot\frac{1}{3^x}=0$

notăm $3^x=t>0$

$t^3-3t^2+t-5+\frac{6}{t}=0$; $t^4-3t^3+t^2-5t+6=0$

$(t-3)(t-1)(t^2+t+2)=0$
(din b)

$t-3=0 \Rightarrow t_1=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x_1=1$
$t-1=0 \Rightarrow t_2=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow x_2=0$
$t^2+t+2=0$; $\Delta=1-8=-7<0 \Rightarrow t_{3,4}\notin\mathbb{R}$

$\begin{cases} x_1=1\\ x_2=0\end{cases}$

V 016

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.

5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1, 2, -3)$.

5p c) Pentru $m = -1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 9X^2 - X + 9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p b) Să se verifice că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x) = 0$.

① a) $-6m + m + 1 + 10 + 2m + 2 - 2m - 15 = -12$

$-5m - 2 = -12 \Rightarrow -5m = -10 \Rightarrow \underline{m = 2}$

c) $\begin{cases} -x + y + z = -2 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ 2y + 3z = -2 \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 10 + 2 - 15 = 3$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 4 - 4 + 4 + 6 = 12$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 24$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -18$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{12}{3} = 4 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{24}{3} = 8 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-18}{3} = -6 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \\ z = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2 - 3 = m^2 - 3 \\ m + 1 + 4 - 9 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{m = 2}$

② a) $f = x^2(x - 9) - (x - 9) = (x - 9)(x^2 - 1) \Rightarrow \begin{cases} q = x - 9 \\ r = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = 9 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} = -1 \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -9 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 81$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81 + 2 = 83$

$\begin{cases} x_1^3 - 9x_1^2 - x_1 + 9 = 0 \\ x_2^3 - 9x_2^2 - x_2 + 9 = 0 \\ x_3^3 - 9x_3^2 - x_3 + 9 = 0 \end{cases}$

$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \overbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}^{9} + 27 = 0$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 18$

c) $f(3^x) = 0$

$(3^x - 9)(3^{2x} - 1) = 0$ (din a)

$3^x = 9 \Rightarrow x_1 = 2$

$3^{2x} = 1 \Rightarrow x_2 = 0$ $\quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

V017

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_1A_2.

5p **c)** Să se arate că toate punctele $A_n(n, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ sunt coliniare.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă $A(a) \cdot A(b) = A(2ab)$, oricare ar fi numerele reale a și b.

5p **b)** Să se arate că $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru față de operația de înmulțire a matricelor pe M.

5p **c)** Să se determine simetricul elementului $A(1) \in M$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe mulțimea M.

① a) $A_1(1;3)$; $A_2(2;5)$ $\quad A_1A_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_1A_2: 3x + 2y + 5 - 6 - 5x - y = 0$

$A_1A_2: -2x + y - 1 = 0 \mid (-1)$; $A_1A_2: 2x - y + 1 = 0$

b) $\mathcal{A}_{\Delta OA_1A_2} = \frac{1}{2}|\Delta|$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$

$\mathcal{A}_{\Delta OA_1A_2} = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2}$

c) $A_n(n; 2n+1)$; $A_m(m; 2m+1)$; $A_p(p; 2p+1)$

$\begin{vmatrix} n & 2n+1 & 1 \\ m & 2m+1 & 1 \\ p & 2p+1 & 1 \end{vmatrix} = 2mn + m + 2np + p + 2mp + n - 2mp - p - 2np - n - 2mn - m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ punctele $A_n(n; 2n+1)$ sunt coliniare $\forall n \in \mathbb{N}$

② a) $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} = A(2ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

b) $\left.\begin{array}{l} A(a) \cdot A(\frac{1}{2}) = A(2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}) = A(a) \\ A(\frac{1}{2}) \cdot A(a) = A(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a) = A(a) \end{array}\right\} \Rightarrow A(a) \cdot A(\frac{1}{2}) = A(\frac{1}{2}) \cdot A(a) = A(a)$, $\forall A(a) \in M$

c) $A(1) \cdot A(x) = A(\frac{1}{2})$

$A(2 \cdot 1 \cdot x) = A(\frac{1}{2}) \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$A(\frac{1}{4})$ - simetricul matricei $A(1)$ față de înmulțirea matricelor din M

V018

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{Z},\ a^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și respectiv $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se determine matricea $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}=aI_2+bB$, oricare $a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.

2. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f=X^3+aX^2-5X+14$ și suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **a)** Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=-2$.

5p **b)** Pentru $a=-4$ să se rezolve ecuația $f(x)=0$.

5p **c)** Pentru $a=-4$ să se demonstreze egalitatea $S_3+42=4S_2+5S_1$.

① a) $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a+b=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ $a^2=1 \Rightarrow I_2\in G$.

$O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a=b=0$ $a^2=0\neq 1 \Rightarrow O_2\notin G$.

b) $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$; $aI_2+bB=\begin{pmatrix} a+bx & by \\ bz & a+bt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a+bx=a+b \\ by=b \\ bz=-b \\ a+bt=a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bx=b \\ by=b \\ bz=-b \\ bt=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-1 \\ t=-1 \end{cases}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\det A=(a+b)(a-b)+b^2=a^2-b^2+b^2=a^2=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

${}^tA=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} a-b & -b \\ b & a+b \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=A^*=$

$=\begin{pmatrix} a+(-b) & -b \\ -(-b) & a-(-b) \end{pmatrix}$; $a^2=1$ deci $A^{-1}\in G, \forall A\in G$.

② a) $f(-2)=0 \Rightarrow -8+4a+10+14=0$; $+4a=-16 \Rightarrow \underline{a=-4}$

b) $x^3-4x^2-5x+14=0$; $x_1=-2$ (din a)

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-4	-5	14
-2	1	-6	7	$\boxed{0}$

$q=x^2-6x+7$
$x^2-6x+7=0$
$\Delta=36-28=8$
$x_{2,3}=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$

$\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=3-\sqrt{2} \\ x_3=3+\sqrt{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1^3-4x_1^2-5x_1+14=0 \\ x_2^3-4x_2^2-5x_2+14=0 \\ x_3^3-4x_3^2-5x_3+14=0 \end{cases}$

$(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-4(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-5(x_1+x_2+x_3)+42=0$

$S_3-4S_2-5S_1+42=0$; $S_3+42=4S_2+5S_1$

V019

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n,2n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B_1 și B_2.

5p **b)** Să se arate că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, punctul A_n aparține dreptei A_1A_2.

2. În mulțimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - X - 1$.

5p **a)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3 = 2y + 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

1) a) $B_1(-1;2)$; $B_2(-2;4)$ $\quad B_1B_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$2x - 2y - 4 + 4 - 4x + y = 0$; $\quad -2x - y = 0 \mid (-1)$ $\quad B_1B_2: \underline{2x + y = 0}$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_2 2^{-n} = -n$; $\log_3 9^n = \log_3 3^{2n} = 2n$

$A_n(-n;2n) = B_n(-n;2n)$

c) $A_1(-1;2)$; $A_2(-2;4)$; $A_n(-n;2n)$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -n & 2n & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4n - 2n + 4n + 2n + 4 = 0 \Rightarrow A_n \in A_1A_2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) a)

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 - x - 1 \\ \underline{-x^4 + x^3 + x^2} & x^2 + 2x + 4 \\ \quad / \ 2x^3 + 2x^2 + x + 1 & \\ \quad \underline{-2x^3 + 2x^2 + 2x} & \\ \qquad / \ 4x^2 + 3x + 1 & \\ \qquad \underline{-4x^2 + 4x + 4} & \\ \qquad\quad / \ 7x + 5 & \end{array}$$

$q = x^2 + 2x + 4$

$r = 7x + 5$

b) $y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = y + 1 \mid \cdot y$; $\quad y^3 = y^2 + y = (y+1) + y = 2y + 1$

c) $f(y) = (y^2 - y - 1)(y^2 + 2x + 4) + 7y + 5$

$y^2 - y - 1 = 0$; $\Delta = 5$; $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 7y + 5 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) \notin \mathbb{Q}$

V020

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n+2, 3n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se scrie ecuaţia dreptei determinate de punctele A_1 şi A_2.

5p **b)** Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, punctele A_1, A_2 şi A_n sunt coliniare.

2. Se consideră polinoamele $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$ şi $g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

5p **c)** Să se determine câtul împărţirii polinomului f la polinomul g.

① a) $A_1(3;1)$; $A_2(4;4)$

$A_1A_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_1A_2: x + 4y + 12 - 4 - 4x - 3y = 0$

$A_1A_2: -3x + y + 8 = 0 \mid (-1)$

$A_1A_2: 3x - y - 8 = 0$

b) $A_0(2;-2)$; $A_1(3;1)$

$\mathcal{A}_{\Delta OA_0A_1} = \frac{1}{2}|\Delta|$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$

$\mathcal{A}_{\Delta OA_0A_1} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ n+2 & 3n-2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 12n - 8 + n + 2 - 4n - 8 - 9n + 6 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_n$ - coliniare, $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

② a) $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{4} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{2}$

b) $\hat{3}x^5 + \hat{3}x^3 + \hat{3}x + \hat{4} = \hat{0}$; $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}; \hat{1}; \hat{2}; \hat{3}; \hat{4}\}$

$f(\hat{0}) = \hat{4} \neq \hat{0}$; $f(\hat{1}) = \hat{3} \neq \hat{0}$; $f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow x_1 = \hat{2}$; $f(\hat{3}) = \hat{3} \neq \hat{0}$

$f(\hat{4}) = \hat{0} \Rightarrow x_2 = \hat{4}$ $\quad \begin{cases} x_1 = \hat{2} \\ x_2 = \hat{4} \end{cases}$ în $\mathbb{Z}_5$

c)

$$\begin{array}{l|l} \hat{3}x^5 + \hat{3}x^3 + \hat{3}x + \hat{4} & \hat{3}x^3 + \hat{3}x^2 + \hat{2}x + \hat{3} \\ \hat{2}x^5 + \hat{2}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{2}x^2 & x^2 + \hat{4}x + \hat{3} \\ \hline / \ \hat{2}x^4 + x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{4} & \\ \ \ \hat{3}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{3}x & \\ \hline / \ \hat{4}x^3 + \hat{4}x^2 + x + \hat{4} & \\ \ \ x^3 + x^2 + \hat{4}x + \hat{1} & \\ \hline \end{array}$$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$

$\begin{cases} q = x^2 + \hat{4}x + \hat{3} \\ r = \hat{0} \end{cases}$

V021

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(I_3+B)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(A)=I_3+B$.

5p **c)** Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x\circ x=x*x$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x*(y+1)=4\\(x-y)\circ 1=5\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

① a) $\det(I_3+B)=\begin{vmatrix}1&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=1$

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}$

$f(A)=\begin{pmatrix}9&6&7\\0&9&6\\0&0&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&3&3\\0&9&3\\0&0&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3+B$

c) $(f(A))^3=(I_3+B)^3=I_3^3+B^3+3BI_3(I_3+B)=I_3+B^3+3B+3B^2$

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&21\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$B^3=\begin{pmatrix}0&3&4\\0&0&3\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&21\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$; $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$

② a) $x+x-3=(x-3)(x-3)+3$; $2x-3=x^2-6x+9+3$;
$x^2-8x+15=0$; $\Delta=64-60=4$; $x_{1,2}=\frac{8\pm2}{2}=\begin{cases}x_1=3\\x_2=5\end{cases}$

b) $(x-3)(a-3)+3=3$; $\forall x\in\mathbb{Z}$; $(x-3)(a-3)=0$, $\forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow a-3=0\Rightarrow a=3$

c) $\begin{cases}x+y+1-3=4\\(x-y-3)(1-3)+3=5\end{cases}$ $x,y\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases}x+y=6\\-2x+2y+6+3=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\-2x+2y=-4\,|:2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=6\\-x+y=-2\end{cases}$ $2y=4$ $\quad y=2$, $x=6-2=4$ $\quad\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

V022

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a\end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

5p a) Să se verifice că $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in G$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin G$.

5p b) Să se arate că pentru orice două matrice $A,B\in G$ are loc egalitatea $A\cdot B=B\cdot A$.

5p c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G aparține mulțimii G.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+11X^2+7X+m$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

5p a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g=X-1$.

5p b) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât $f(\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$.

5p c) Pentru $m=-9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

① a) pt $a=1;\ b=0$ $a^2-3b^2=1$; $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in G$.

pt $a=b=0$; $a^2-3b^2=0\neq 1 \Rightarrow O_2\notin G$.

b) $A=\begin{pmatrix}a&b\\3b&a\end{pmatrix}\in G$; $B=\begin{pmatrix}c&d\\3d&c\end{pmatrix}\in G$. $a^2-3b^2=1$; $c^2-3d^2=1$.

$$\left.\begin{aligned} A\cdot B&=\begin{pmatrix}a&b\\3b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\3d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd & ad+bc\\ 3(ad+bc) & ac+3bd\end{pmatrix}\\ B\cdot A&=\begin{pmatrix}c&d\\3d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\3b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+3bd & bc+ad\\ 3(bc+ad) & ac+3bd\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow AB=BA,\ \forall A,B\in G.$$

c) $A\in G$; $\det A=a^2-3b^2=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{1}\cdot A^*=A^*$

${}^tA=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$ $A_{11}=a$; $A_{12}=-b$; $A_{21}=-3b$; $A_{22}=a$

$A^{-1}=A^*=\begin{pmatrix}a&-b\\-3b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\3(-b)&a\end{pmatrix}$; $a^2-3(-b)^2=a^2-3b^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}\in G$.

② a) $X-1 / f \Rightarrow f(1)=0$; $m+11+7+m=0$; $2m=-18$; $m=-9$

b) $f(\sqrt{2})=2m\sqrt{2}+11\cdot 2+7\sqrt{2}+m=(2m+7)\sqrt{2}+m+22$

$f(\sqrt{2})\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2m+7=0\Rightarrow m=-\frac{7}{2}$

c) $m=-9$; $f=-9x^3+11x^2+7x-9$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=\frac{11}{9}\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=-\frac{7}{9}\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{9}{9}=-1\end{cases}$$

$(x_1+x_2+x_3)^3=\frac{121}{81}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$

$=\frac{121}{81}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\left(-\frac{7}{9}\right)=\frac{121}{81}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{121}{81}+\frac{14}{9}=\frac{121+126}{81}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{247}{81}$

V023

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ și $C(3,-2)$ unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a = 0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

5p **b)** Pentru $a = -2$ să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele B și C.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele B, C și $M(x,-2)$ sunt coliniare, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + (a+3)X^2 + 6X - 4$ care are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X - \sqrt{2}$.

5p **c)** Pentru $a = -3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

① a) $A(7;4);\ B(0;0);\ C(3;-2)\quad \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$

$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 14 = 26;\quad \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13$

b) $B(-2;-2);\ C(3;-2)\quad BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$BC: -2x + 3y + 4 + 6 + 2x + 2y = 0;\quad BC: 5y + 10 = 0;\ BC: y + 2 = 0$

c) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R};\quad \cancel{-2a} + ax - 6 + 2x + \cancel{2a} - 3a = 0$

$x(a+2) - 3(a+2) = 0 \Rightarrow (a+2)(x-3) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

② a) $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -3$

b) $x - \sqrt{2} / f \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow 4 + 2a\sqrt{2} + (a+3) \cdot 2 + 6\sqrt{2} - 4 = 0$

$2a\sqrt{2} + 2a + 4 + 6 + 6\sqrt{2} - 4 = 0;\quad 2a(\sqrt{2}+1) = -6(\sqrt{2}+1) \,|: 2(\sqrt{2}+1)$

$a = -3.$

c) $f = x^4 - 3x^3 + 6x - 4;\quad x_1 = \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) =$

$= x^2 - 2 / f$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 + 6x - 4 & x^2 - 2 \\ \hline -x^4 + 2x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline /\ -3x^3 + 2x^2 + 6x - 4 & \\ \ \ 3x^3 - 6x & \\ \hline /\ \ 2x^2 - 4 & \\ \ -2x^2 + 4 & \\ \hline /\ \ / & \end{array}$$

$q = x^2 - 3x + 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_{3,4} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$

$f = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)(x-2)$

V024

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $(2,1,-1)$ să fie o soluție sistemului.

5p b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2-3m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p c) Pentru $m=-5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+1)X^2-3X+3$, $f\in\mathbb{Q}[X]$.

5p a) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

5p b) Să se determine $m\in\mathbb{Q}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=\sqrt{3}$.

5p c) Pentru $m=0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

① a) $2m-1-4=1 \Rightarrow 2m=6 \Rightarrow m=3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4-2m-6-3m+1+16=-5m+15$

$m^2-3m=-5m+15;\quad m^2+2m-15=0$

$\Delta=4+60=64;\quad m_{1,2}=\frac{-2\pm 8}{2} = \begin{cases} m_1=-5 \\ m_2=3 \end{cases}$

c) $m=-5;\quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5(-5)+15=40\neq 0$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12-2-12-3-3+32=0$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16+15+6+60-1+24=120$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+40+6-15+4+4=40$

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=0;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=3;\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1 \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

② a) $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=m+1;\quad m+1=1 \Rightarrow m=0$

b) $f(\sqrt{3})=0;\ 3\sqrt{3}-(m+1)\cdot 3-3\sqrt{3}+3=0;\ -3m-3+3=0 \Rightarrow m=0$

c) $m=0;\ f=x^3-x^2-3x+3=x^2(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x^2-3)$

V025

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se calculeze $\det(A(4))$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ să se rezolve sistemul.

2. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale polinomului f.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ pentru care polinomul f are o rădăcină raţională pozitivă.

① a) $A(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 32+4+4-2-16-16=6$

b) $A(a)$ - inversabilă $\Rightarrow \det(A(a)) \neq 0$

$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2+a+4-2-4a-a^2 = a^2-3a+2 =$
$= (a-1)(a-2) \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$

c) $\Delta = \det(A(a)) = a^2-3a+2$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = a^2-3a+2;\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a^2-3a+2}{a^2-3a+2} = 1;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 0$

$x=1;\ y=0;\ z=0$

② a) $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1+x_2+x_3=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2$

b) $X^2-2 \mid f \Rightarrow (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}) \mid f \Rightarrow \begin{cases} f(\sqrt{2})=0 \\ f(-\sqrt{2})=0 \end{cases} \Rightarrow f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})=0$

$2\sqrt{2}+2a-a\sqrt{2}-\cancel{4} = -2\sqrt{2}+2a+a\sqrt{2}-\cancel{4}$

$-2a\sqrt{2} = -4\sqrt{2} \mid :(-2\sqrt{2}) \Rightarrow a=2.$

c) Pot fi rădăcini raţionale pozitive divizorii lui 4; $\{1;2;4\}$

$x_1=1;\ f(1)=1+a-a-4=-3\neq 0$

$x_2=2;\ f(2)=8+4a-2a-4=2a+4;\ 2a+4=0 \Rightarrow a=-2$

$x_3=4;\ f(4)=64+16a-4a-4=12a+60;\ 12a=-60;\ a=-5$

pt $a_1=-2 \Rightarrow x=2$ răd.

pt $a_2=-5 \Rightarrow x=4$ răd.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Se notează $A^2 = A \cdot A$.

5p a) Să se calculeze A^2.

5p b) Să se verifice că $A^2 = aI_2 + bA$.

5p c) Știind că $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $AX = XA$, să se arate că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $X = mI_2 + nA$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

5p a) Să se determine a știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

5p b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

① a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a+b^2 \end{pmatrix}$

b) $aI_2 + bA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ab & a+b^2 \end{pmatrix} = A^2$

c) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ ax+bu & ay+bv \end{pmatrix}$

$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ya & yb+x \\ va & u+vb \end{pmatrix}$

$AX = XA \Rightarrow \begin{cases} u = ya \\ v = yb + x \\ ax + bu = va \\ ay + bv = u + bv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = ya \\ v = x + yb \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ ay & x+by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ ay & by \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} =$

$= xI_2 + yA;\ x, y \in \mathbb{Z};\ \begin{cases} m = x \\ n = y \end{cases}\quad m, n \in \mathbb{Z}$

② a) $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a - 1 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

b) $f = x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^3-1) = (x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow x_{3,4} \notin \mathbb{R}$.

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

c) $f \in \mathbb{Z}[x]$; dacă $x = \frac{m}{n}$ răd $\Rightarrow \begin{cases} m \mid -1 \Rightarrow m \in \{\pm 1\} \\ n \mid 1 \Rightarrow n \in \{\pm 1\} \end{cases}$

deci $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow f$ nu poate avea rădăcini în $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

V027

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se verifice că $AB-2B=O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $A\cdot X\cdot B=O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_2[X]$, $f=X^2+\hat{1}$ și $g=X+\hat{1}$ și mulțimea $H=\left\{a+bX+cX^2\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $g^2=f$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii H.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A$

b) $AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}$; $2B=\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}$

$AB-2B=\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}=O_2$

c) $X=\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}$ $\quad AX=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+u&y+v\\x+u&y+v\end{pmatrix}$

$(AX)\cdot B=\begin{pmatrix}x+u&y+v\\x+u&y+v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+u+y+v&-x-u-y-v\\x+u+y+v&-x-u-y-v\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y+u+v=0$

② a) $f=x^2+\hat{1}$, $g=x+\hat{1}$; $\quad g^2=(x+\hat{1})^2=x^2+\cancel{\hat{2}x}+\hat{1}=x^2+\hat{1}$

b) $f+g=x^2+\cancel{\hat{1}}+x+\hat{1}=(x^2+\hat{1})\cdot\hat{1}+(x+\hat{1})\Rightarrow\begin{cases}q=\hat{1}\\r=x+\hat{1}\end{cases}$

c) $H=\{a+bx+cx^2\mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\}$

$a\in\{\hat{0},\hat{1}\}$; $b\in\{\hat{0},\hat{1}\}$; $c\in\{\hat{0},\hat{1}\}$

Nr. elementelor mulțimii H este $2^3=8$

V028

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $M = \{aI_2 + bV \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $I_2 \in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $A \in M$ și A este matrice inversabilă, atunci $a \neq 0$.

5p **c)** Știind că $A, B \in M$, să se arate că $AB \in M$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = xy - 5(x+y) + 30$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x * y = (x-5)(y-5) + 5$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

5p **c)** Știind că legea de compoziție „$*$" este asociativă, să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

① a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 I_2 + 0 \cdot V \in M$ pt $a = 1$ și $b = 0$

b) $A \in M \Rightarrow A = aI_2 + bV = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{pmatrix}$

A - inversabilă $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) + b^2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$

c) $A, B \in M$; $A = aI_2 + bV$; $B = cI_2 + dV$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$AB = (aI_2 + bV)(cI_2 + dV) = acI_2 + adV + bcV + bdV^2 =$

$= acI_2 + (ad+bc)V + bdV^2$

$V^2 = V \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

$AB = acI_2 + (ad+bc)V \Rightarrow AB \in M$

② a) $(x-5)(y-5) + 5 = xy - 5x - 5y + 25 + 5 = xy - 5(x+y) + 30 =$

$= x * y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $x * y = y * x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

$x * e = e * x = x$; $(x-5)(e-5) + 5 = x$; $(x-5)(e-5) - (x-5) = 0$

$(x-5)(e-5-1) = 0 \Rightarrow e - 6 = 0 \Rightarrow e = 6$

c) $[(x-5)(x-5)+5] * x = x$; $[(x-5)^2 + 5 - 5](x-5) + 5 = x$

$(x-5)^2(x-5) - (x-5) = 0$; $(x-5)(x^2 - 10x + 25 - 1) = 0$

$(x-5)(x^2 - 10x + 24) = 0$ $\quad x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$\Delta = 100 - 96 = 4$

$x_{2,3} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases}$

V029

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

5p **a)** Să se calculeze $I_2+(I_2)^t$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $m\in\mathbb{R}$ are loc relația $(mA)^t=mA^t$.

5p **c)** Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A+A^t=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x*y=(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $x*x=x$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

① a) $(I_2)^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$; $I_2+(I_2)^t=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

b) $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$; $mA^t=\begin{pmatrix}ma&mc\\mb&md\end{pmatrix}$

$mA=\begin{pmatrix}ma&mb\\mc&md\end{pmatrix}$; $(mA)^t=\begin{pmatrix}ma&mc\\mb&md\end{pmatrix}=mA^t$

c) $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$; $A+A^t=\begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}$

$A+A^t=O_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=d=0\\b+c=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}a=d=0\\b=x\in\mathbb{R}\\c=-x\in\mathbb{R}\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}0&x\\-x&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $x\in\mathbb{R}$

② a) $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}=x$; $(x-\sqrt{2})^2-(x-\sqrt{2})=0$; $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0$

$x-\sqrt{2}=0\Rightarrow x_1=\sqrt{2}$; $x-\sqrt{2}-1=0\Rightarrow x_2=\sqrt{2}+1$; $\begin{cases}x_1=\sqrt{2}\\x_2=\sqrt{2}+1\end{cases}$

b) $(x*y)*z=[(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}]*z=[(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}-\sqrt{2}]\cdot$

$\cdot(z-\sqrt{2})+\sqrt{2}=(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z-\sqrt{2})+\sqrt{2}$ ①

$x*(y*z)=x*[(y-\sqrt{2})(z-\sqrt{2})+\sqrt{2}]=(x-\sqrt{2})[(y-\sqrt{2})(z-\sqrt{2})+\sqrt{2}-\sqrt{2}]+$

$+\sqrt{2}=(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})(z-\sqrt{2})+\sqrt{2}$ ②

din ① și ② $\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

c) $x*y=y*x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$; $x*e=e*x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$x*e=x$; $(x-\sqrt{2})(e-\sqrt{2})+\sqrt{2}=x$

$(x-\sqrt{2})(e-\sqrt{2})-(x-\sqrt{2})=0$

$(x-\sqrt{2})(e-\sqrt{2}-1)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=\sqrt{2}+1$

V030

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, sunt distincte două câte două.

5p **a)** Să se rezolve sistemul pentru $a=0$, $b=1$ și $c=2$.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a,b și c.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine m astfel încât $e=-6$ să fie elementul neutru al legii "$*$".

5p **c)** Să se determine m astfel încât $(-\sqrt{3})*(-\sqrt{2})*m*\sqrt{3}=3\sqrt{2}$.

① a) $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \\ 2y+4z=2 \mid :(-2) \end{cases}$

$\begin{cases} y+z=1 \\ -y-2z=-1 \end{cases}$
$\quad -z=0 \Rightarrow z=0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

b) $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$

$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$

c) $\Delta_x=\begin{vmatrix} a & a & a^2 \\ b & b & b^2 \\ c & c & c^2 \end{vmatrix}=0$; $\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix}=0$; $x=\frac{\Delta x}{\Delta}=0$; $y=\frac{\Delta y}{\Delta}=1$; $z=\frac{\Delta z}{\Delta}=0$; $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Soluția sistemului nu depinde de a, b, c.

② a) $\left.\begin{array}{l} (x*y)*z=(x+y+m)*z=x+y+z+2m \\ x*(y*z)=x*(y+z+m)=x+y+z+2m \end{array}\right\} \Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z),$
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) $x*e=e*x=x$; $x+e+m=x$; $\Rightarrow e=-m$; $-m=6$; $\underline{m=-6}$

c) $(-\sqrt{3})*(-\sqrt{2})*m*\sqrt{3}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}+m+2m+\sqrt{3}+m=4m-\sqrt{2}$

$4m-\sqrt{2}=3\sqrt{2} \Rightarrow 4m=4\sqrt{2} \Rightarrow m=\sqrt{2}$

V031

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| \ a,b\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei $A(1,1)$.

5p b) Să se demonstreze că dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $A+B\in\mathcal{M}$.

5p c) Să se arate că $\det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p a) Pentru $g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $g=\left(X+\hat{2}\right)^2\left(X+\hat{1}\right)$, să se calculeze $g\left(\hat{0}\right)$.

5p b) Dacă $f\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, să se arate că $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}_3$.

5p c) Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbb{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 și pentru care $h\left(\hat{0}\right)=h\left(\hat{1}\right)=h\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.

① a) $A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$; $\det A(1,1)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1.$

b) $A,B\in\mathcal{M}$; $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c-d\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ -(b+d) & (a+c)-(b+d)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}.$

c) $I_2-A(0,b)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -b\\ b & 1+b\end{pmatrix}$

$\det\left(I_2-A(0,b)\right)=\begin{vmatrix}1 & -b\\ b & 1+b\end{vmatrix}=1+b+b^2=\left(\frac{1}{2}+b\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0, \forall b\in\mathbb{R}$

② a) $\mathbb{Z}_3=\{\hat{0};\hat{1};\hat{2}\}$ $\quad g(\hat{0})=(\hat{0}+\hat{2})^2\cdot(0+\hat{1})=\hat{1}\cdot\hat{1}=\hat{1}$

b) $f\in\mathbb{Z}_3[X]$; $f=X^3+\hat{2}X$

$f(\hat{0})=\hat{0}$; $f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$; $f(\hat{2})=\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$

$f(x)=\hat{0}$, $\forall x\in\mathbb{Z}_3$

c) $h=aX^3+bX^2+cX+d$; $a\neq\hat{0}$

$h(\hat{0})=d$; $h(\hat{1})=a+b+c+d$; $h(\hat{2})=\hat{2}a+b+\hat{2}c+d$

$\begin{cases} d=\hat{0} \\ a+b+c=\hat{0} \\ \hat{2}a+b+\hat{2}c=\hat{0}\end{cases} \Rightarrow \underbrace{a+\hat{2}a}_{\hat{0}}+\hat{2}b+\underbrace{c+\hat{2}c}_{\hat{0}}=\hat{0}$

$\hat{2}b=\hat{0}\Rightarrow b=\hat{0}$

$a+c=\hat{0}\Rightarrow \begin{cases} a_1=\hat{1};\ c_1=\hat{2} \\ a_2=\hat{2};\ c_2=\hat{1}\end{cases}$

$h_1=X^3+\hat{2}X$; $h_2=\hat{2}X^3+X$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

5p b) Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.

5p c) Să se arate că pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este un număr natural.

2. Se consideră polinomul $f = 4X^4 + 4mX^3 + (m^2+7)X^2 + 4mX + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

5p b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

5p c) Pentru $m = -5$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 0$.

(1) a) $A_0(0;0)$; $A_1(1;1)$ $\quad A_0A_1: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $A_0A_1: x - y = 0$

b) $A_2(2;4)$ $\quad \mathcal{A}_{\Delta A_0A_1A_2} = \frac{1}{2}|\Delta|$

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$, $\mathcal{A}_{\Delta A_0A_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

c) $\mathcal{A}_{\Delta A_mA_nA_p} = \frac{1}{2}|\Delta|$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} m & m^2 & 1 \\ n & n^2 & 1 \\ p & p^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & m^2 & 1 \\ n-m & n^2-m^2 & 0 \\ p-m & p^2-m^2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} n-m & n^2-m^2 \\ p-m & p^2-m^2 \end{vmatrix} = (n-m)(p-m)\begin{vmatrix} 1 & n+m \\ 1 & p+m \end{vmatrix} =$

$= (n-m)(p-m)(p+m-n-m) = (n-m)(p-m)(p-n)$

$m, n, p \in \mathbb{N}$, distincte 2 câte 2 $\Rightarrow (n-m); (p-m); (p-n)$ sunt nr. întregi, cel puțin 2 au aceeași paritate

$\Delta = 2k$; $\mathcal{A}_{\Delta A_mA_nA_p} = \frac{1}{2}|2k| = |k| \in \mathbb{N}$

(2) a) $f(1) = 0 \Rightarrow 4 + 4m + m^2 + 7 + 4m + 4 = 0$; $m^2 + 8m + 15 = 0$

$\Delta = 64 - 60 = 4$; $m_{1,2} = \frac{-8 \pm 2}{2} \Rightarrow m_1 = -5$, $m_2 = -3$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{4m}{4} = -m$; $-m = 0 \Rightarrow m = 0$

c) $m = -5$; $f = 4x^4 - 20x^3 + 32x^2 - 20x + 4$; $x_1 = 1$ (din a)

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	4	-20	32	-20	+4
1	4	-16	16	-4	$\boxed{0}$ $\Rightarrow x_1 = 1$
1	4	-12	4	$\boxed{0}$ $\Rightarrow x_2 = 1$	

$q = 4x^2 - 12x + 4 = 4(x^2 - 3x + 1)$

$x^2 - 3x + 1 = 0$
$\Delta = 9 - 4 = 5$
$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

V033

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru oricare $X,Y\in\mathcal{M}$, rezultă că $XY\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $U\in\mathcal{M}$ şi $VU=UV$, pentru orice $V\in\mathcal{M}$, atunci există $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $U=\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Ştiind că $a=0$ să se determine soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$.

5p **b)** Să se verifice că $f=\left(X^2-2X+1+a\right)\left(X^2-2X+1-a\right)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

① a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5&6\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $X,Y\in\mathcal{M}$; $X=\begin{pmatrix}1&a_1&c_1\\0&1&b_1\\0&0&1\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}1&a_2&c_2\\0&1&b_2\\0&0&1\end{pmatrix}$

$XY=\begin{pmatrix}1&a_1+a_2&c_1+c_2+a_1b_2\\0&1&b_1+b_2\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$; a_1+a_2; $c_1+c_2+a_1b_2$; $b_1+b_2\in\mathbb{Z}$

c) $U\in\mathcal{M}$; $U=\begin{pmatrix}1&m&p\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$; $V=\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$

$VU=UV\Rightarrow\begin{pmatrix}1&a+m&c+p+an\\0&1&b+n\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+m&c+p+bm\\0&1&b+n\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow an=bm,\ \forall a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow n=m=0;\ p\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow U=\begin{pmatrix}1&0&p\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

② a) $a=0$; $(x^2-2x+1)^2=0$; $(x-1)^4=0\Rightarrow x_1=x_2=x_3=x_4=1$

b) $f=\left[(x^2-2x+1)-a\right]\left[(x^2-2x+1)+a\right]=(x^2-2x+1+a)(x^2-2x+1-a)$

c) $\Delta_1=4-4(1+a)=-4a$

$\Delta_2=4-4(1-a)=4a$

$\left.\begin{array}{l}x_{1,2}\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta_1\geq0\Rightarrow-4a\geq0\Rightarrow a\leq0\\ x_{3,4}\in\mathbb{R}\Rightarrow\Delta_2\geq0\Rightarrow4a\geq0\Rightarrow a\geq0\end{array}\right\}\Rightarrow a=0$

V034

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}^*\right\}$ și matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$. Se notează cu X^t transpusa matricei X.

5p a) Să se calculeze $A^t\cdot A$.

5p b) Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}$, are loc egalitatea $\det\left(X\cdot X^t\right)=(ad-bc)^2$.

5p c) Să se arate că, pentru orice matrice $X=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ cu $\det\left(X\cdot X^t\right)=0$, are loc relația $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție definită prin $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p a) Să se arate că legea "$\circ$" este asociativă.

5p b) Să se arate că, pentru oricare $x,y\in(1,+\infty)$, rezultă că $x\circ y\in(1,+\infty)$.

5p c) Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $x\circ a=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

① a) $A^t\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&15\\15&45\end{pmatrix}$

b) $X\cdot X^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}$

$\det(X\cdot X^t)=(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)(ab+cd)=$
$=\cancel{a^2b^2}+a^2d^2+b^2c^2+\cancel{c^2d^2}-\cancel{a^2b^2}-2abcd-\cancel{c^2d^2}=$
$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd=(ad-bc)^2$

c) $\det(X\cdot X^t)=0\Rightarrow ad-bc=0\Rightarrow ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$

② a) $(x\circ y)\circ z=(xy-x-y+2)\circ z=xyz-xz-yz+2z-xy+x+$
$+y-2-z+2=xyz-xz-yz-xy+x+y+z$ ①
$x\circ(y\circ z)=x\circ(yz-y-z+2)=xyz-xy-xz+2x-x-$
$-yz+y+z-2+2=xyz-xy-xz-yz+x+y+z$ ②
din ① și ② $\Rightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in(1,+\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l}x\in(1,+\infty)\Rightarrow x>1\Rightarrow x-1>0\\ y\in(1,+\infty)\Rightarrow y>1\Rightarrow y-1>0\end{array}\right\}\Rightarrow(x-1)(y-1)>0$
$xy-x-y+1>0\ |+1\Rightarrow$
$\Rightarrow xy-x-y+2>1\Rightarrow x\circ y\in(1,+\infty),\ \forall x,y\in(1,+\infty)$

c) $xa-x-a+2=a$; $x(a-1)-2(a-1)=0$; $(x-2)(a-1)=0,\ \forall x\in\mathbb{Z}$
$a-1=0\Rightarrow a=1.$

V035

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin $f(A)=A+A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p a) Să se calculeze $f(I_2)$.

5p b) Să se demonstreze că $(A+B)^t=A^t+B^t$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p c) Să se determine matricele $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A=1$ și $f(A)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră ecuația $x^4-ax^3-ax+1=0$ cu soluțiile x_1,x_2,x_3,x_4, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.

5p b) Pentru $a=1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.

5p c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

① a) $f(I_2)=I_2+I_2^t=2I_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

b) $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$

$B^t=\begin{pmatrix}e&g\\f&h\end{pmatrix}$; $A+B=\begin{pmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{pmatrix}$; $(A+B)^t=\begin{pmatrix}a+e&c+g\\b+f&d+h\end{pmatrix}$

$A^t+B^t=\begin{pmatrix}a+e&g+c\\b+f&d+h\end{pmatrix}$; deci $(A+B)^t=A^t+B^t$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

c) $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$; $A^t=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$; $f(A)=\begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}=O_2\Rightarrow\begin{cases}a=d=0\\b+c=0\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$

$\det A=1$; $b^2=1\Rightarrow b=\pm1$; $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

② a) $x_1+x_2+x_3+x_4=a\Rightarrow a=5$

b) $x^4-x^3-x+1=0$; $x^3(x-1)-(x-1)=0$; $(x^3-1)(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)(x-1)=0$; $(x-1)^2(x^2+x+1)=0\Rightarrow x_1=x_2=1$.

$\Delta=1-4=-3<0\Rightarrow x_{3,4}\notin\mathbb{R}$

c) pot fi soluții întregi divizorii lui 1, adică ±1.

pt $x=1$; $1-a-a+1=0$; $2a=2\Rightarrow a=1$.

pt $x=-1$; $1+a+a+1=0$; $2a=-2\Rightarrow a=-1$.

V036

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ și matricele $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $B^2=3B$, unde $B^2=B\cdot B$.

5p **b)** Să se arate că $mI_3+nB\in G$, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A\in G$ și $A^2=O_3$, atunci $A=O_3$, unde $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^2=A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-12X^2+35,\ f\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că $f=(X^2-6)^2-1$.

5p **b)** Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini întregi.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

① a) $B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}=3B$

b) $mI_3+nB=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n & n & n \\ n & n & n \\ n & n & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+n & n & n \\ n & m+n & n \\ n & n & m+n \end{pmatrix}\in G,\ \forall m,n\in\mathbb{Z}$

c) $A^2=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix};\ A^2=O_3 \Rightarrow \begin{cases} a^2+2b^2=0 \\ 2ab+b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=b=0 \Rightarrow A=O_3$

② a) $f=x^4-12x^2+36-1=(x^2-6)^2-1$

b) $f=(x^2-6-1)(x^2-6+1)=(x^2-7)(x^2-5)$

$(x^2-7)(x^2-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-7=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{7}\notin\mathbb{Z} \\ x^2-5=0 \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{5}\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

c) $f=(x^2-7)(x^2-5)=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

V037

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine numerele a,b și c astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $a=c=0$ și $b=-1$ matricea A este inversa matricei F.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $F\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Să se arate că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$" este asociativă.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(1-x)=0$.

① a) $A+F=\begin{pmatrix}2&a&1+b\\0&2&c\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\1+b=4\Rightarrow b=3\\c=5\end{cases}$

b) $\det F=1\neq 0\Rightarrow\exists F^{-1}=\frac{1}{\det F}\cdot F^*$ $\quad {}^tF=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$F^*=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=F^{-1}$ $\quad \left.\begin{matrix}a=c=0\\b=-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=F^{-1}$

c) $X=F^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-6&-6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

② a) $xy+(1-x)(1-y)=xy+1-x-y+xy=2xy-x-y+1=x*y,$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $(x*y)*z=(2xy-x-y+1)*z=4xyz-2xz-2yz+2z-2xy+x+$
$+y-1-z+1=4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z$ ①

$x*(y*z)=x*(2yz-y-z+1)=4xyz-2xy-2xz+2x-x-$
$-2yz+y+z-1+1=4xyz-2xy-2yz-2xz+x+y+z$ ②

din ① și ② $\Rightarrow(x*y)*z=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

c) $2x(1-x)-x-(1-x)+1=0$; $2x-2x^2-x-1+x+1=0$
$-2x^2+2x=0\ |:(-2)$
$x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\end{cases}$

V038

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=2$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine numărul real b, știind că (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului și că $x_0+y_0+z_0=4$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^2-12X+35$ și $g=(X-6)^{2009}+X-6$. Polinomul g are forma algebrică $g=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+...+a_1X+a_0$, cu $a_0,a_1,...,a_{2009} \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)+g(5)$.

5p **b)** Să se arate că numărul $a_0+a_1+...+a_{2009}$ este negativ.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f.

① a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8+3a+2+4-12-a = 2a-14 = 2(a-7)$

b) $a=-1; b=2 \qquad \Delta = 2(-1-7) = -16$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \cancel{-16}+10-12+\cancel{16}+2-60 = -60$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \qquad \begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{15}{4} \\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{3}{4} \\ z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_0+y_0+z_0=4 \\ x_0+y_0+4z_0=4 \end{cases} \Rightarrow z_0=0 \qquad \begin{cases} x_0+y_0=4 \quad |\cdot 2 \\ x_0-2y_0=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0+2y_0=8 \\ x_0-2y_0=5 \end{cases}$

$3x_0 \quad / = 13$

$x_0 = \frac{13}{3}; \quad y_0 = 4-\frac{13}{3} = -\frac{1}{3} \qquad \frac{13}{3}+3(-\frac{1}{3}) = b \Rightarrow b = \frac{10}{3}$

② a) $f(5) = 25-12\cdot 5+35 = 0$

$g(5) = (5-6)^{2009}+5-6 = -1-1 = -2; \quad f(5)+g(5) = -2$

b) $a_0+a_1+\dots+a_{2009} = g(1) = (1-6)^{2009}+1-6 = -5^{2009}-5 =$

$= -(5^{2009}+5) < 0$

c) $x^2-12x+35 = (x-5)(x-7)$

$g = f\cdot q + r; \quad$ grad $r <$ grad $f \Rightarrow$ grad $r = 1$, $r = ax+b$

$g(x) = f(x)\cdot q(x) + r(x); \quad g(x) = (x-5)(x-7)\cdot q(x) + ax+b$

pt $x=5$; $g(5) = 5a+b = -2 \qquad \begin{cases} 5a+b=-2 \quad |(-1) \\ 7a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a-b=2 \\ 7a+b=2 \end{cases}$

pt $x=7$; $g(7) = 7a+b = 2 \qquad 2a \quad / = 4$

$a=2; \; b = -2-10 = -12; \qquad \underline{r = 2x-12}$

V039

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \middle| \ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Știind că $A,B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\geq 0$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*4=10$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*a=a*x=a$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Știind că legea „$*$" este asociativă, să se calculeze $\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*\ldots*\frac{4018}{2009}$.

① a) $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, pt $a=1;\ b=0;\ c=1;\ I_2\in M$

b) $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & c_2\end{pmatrix};\ A,B\in M$ $\Rightarrow A+B\in M$

$A+B=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ b_1+b_2 & c_1+c_2\end{pmatrix}$

c) $AB=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1c_2\\ b_1a_2+c_1b_2 & b_1b_2+c_1c_2\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2a_1+b_1b_2 & a_2b_1+b_2c_1\\ b_2a_1+a_2b_1 & b_2b_1+c_2c_1\end{pmatrix}$

$AB-BA=\begin{pmatrix}0 & a_1b_2-a_2b_1+b_1c_2-b_2c_1\\ -(a_1b_2-a_2b_1+b_1c_2-b_2c_1) & 0\end{pmatrix}$

$\det(AB-AA)=(a_1b_2-a_2b_1+b_1c_2-b_2c_1)^2\geq 0,\ \forall A,B\in M.$

② a) $-4x+2x+2(+4)-2=10;\ -2x+8-2=10;\ -2x=4\Rightarrow x=-2$

b) $-ax+2x+2a-2=a;\ x(2-a)-(2-a)=0;\ (x-1)(2-a)=0,\ \forall x\in R$

$2-a=0\Rightarrow a=2$ $\quad 2*x=-2x+4+2x-2=2$

deci pt $a=2$ avem $x*2=2*x=2,\ \forall x\in R$

c) $\frac{4018}{2009}=2;\ x*2=2*x=2,\ \forall x\in R$ (din b)

$\frac{1}{2009}*\frac{2}{2009}*\ldots*\frac{4018}{2009}=2.$

V.040

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+4y+4z=15 \\ 3x+(a+4)y+5z=22 \\ 3x+2y+(3-a)z=16 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Să se arate că tripletul $(7,1,1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $y_0+z_0=3$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziție $x \perp y = x+y+1$, $x \circ y = ax+by-1$, cu $a,b \in \mathbb{Z}$ și funcția $f(x)=x+2$, $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

5p **b)** Să se determine $a,b \in \mathbb{Z}$ pentru care legea de compoziție „$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Dacă $a=b=1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},\perp)$ și $(\mathbb{Z},\circ)$.

① a) $a=1$. $A_1=\begin{pmatrix}1&4&4\\3&5&5\\3&2&2\end{pmatrix}$; $\det A_1=\begin{vmatrix}1&4&4\\3&5&5\\3&2&2\end{vmatrix}=10+60+24-60-10-24=0$

b) $\begin{cases}7+4+4=15\\3\cdot7+(a+4)1+5=22\\3\cdot7+2\cdot1+(3-a)\cdot1=16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-8\\a=10\end{cases}; -8\neq10 \Rightarrow (7;1;1)$ nu poate fi soluție a sistemului, $\forall a\in\mathbb{R}$.

c) $\begin{cases}x_0+4y_0+4z_0=15\\y_0+z_0=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0+4(y_0+z_0)=15\\y_0+z_0=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0+12=15\\y_0+z_0=3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=3\\y_0+z_0=3\end{cases}$ $\begin{cases}9+(a+4)y_0+5z_0=22\\9+2y_0+(3-a)z_0=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+4)y_0+5z_0=13\\2y_0+(3-a)z_0=7 \mid (-1)\end{cases}$

$\begin{cases}(a+4)y_0+5z_0=13\\-2y_0+(-3+a)z_0=-7\end{cases}$
$(a+2)y_0+(a+2)z_0=6$

$(a+2)(y_0+z_0)=6$
$(a+2)\cdot3=6 \Rightarrow a=0$

$\begin{cases}2y_0+3z_0=7\\y_0+z_0=3 \mid -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y_0+3z_0=7\\-2y_0-2z_0=-6\end{cases}$
$z_0=1$; $y_0=2$

$x_0=3$; $y_0=2$; $z_0=1$

② a) $\left.\begin{array}{l}x\perp(-1)=x-1+1=x\\(-1)\perp x=-1+x+1=x\end{array}\right\} \Rightarrow x\perp(-1)=(-1)\perp x=x, \forall x\in\mathbb{Z}$

b) $\left.\begin{array}{l}(x\circ y)\circ z=(ax+by-1)\circ z=a^2x+aby+bz-a-1\\x\circ(y\circ z)=x\circ(ay+bz-1)=ax+aby+b^2z-b-1\\(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{Z}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}a^2=a\\b^2=b\\a=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ sau $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

c) $f(x)=x+2$; $x\in\mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l}f(x\perp y)=f(x+y+1)=x+y+1+2=x+y+3\\f(x)\circ f(y)=(x+2)\circ(y+2)=(x+2)+(y+2)-1=x+y+3\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x\perp y)=f(x)\circ f(y)$; $\forall x,y\in\mathbb{Z}$, adică f este morfism de grupuri

V041. 41

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x=y+z$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.

5p **a)** Să se determine numărul real a astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.

5p **b)** Pentru $a=4$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 4$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $a \in (2, +\infty)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

1 a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2} - 1 - \cancel{2} - 1 - 1 - 4 = -7$

b) $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 2 - 6 = -7$ $\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3 - 8 = -7$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 2 + 3 = 0$ $\quad \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1 \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = y+z \\ x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+z \\ 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ y - z = 3-2 \\ -y+2z = a-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y+z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$, $2y = 2 \Rightarrow y = 1$ $\quad 1+z=1$, $z=0$

$-y+2z = a-1$; $-1+2\cdot 0 = a-1 \Rightarrow a = 0$

2 a) $f(2) = 0 \Rightarrow 8 - 2\cdot 4 + a\cdot 2 - 8 = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

b) $f = x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = x(x^2 - 2x + 4) - 8 = x\cdot g - 8 \Rightarrow \begin{cases} r = -8 \\ q = x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \\ x_1x_2x_3 = 8 \end{cases}$ $\quad (x_1+x_2+x_3)^2 = 2^2$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{a} = 4$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - 2a$

pt $a \in (2, +\infty) \Rightarrow 4 - 2a < 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0$

deci f nu are toate rădăcinile reale

V042

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=2I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine x real astfel încât $\det(A-xI_2)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^4\cdot X=X\cdot A^4$, pentru orice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A^4=A\cdot A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt2 \mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-2b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $3+2\sqrt2\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\cdot y\in G$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că orice element din mulțimea G are invers în G în raport cu înmulțirea numerelor reale.

① a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&1-1\\1-1&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$

b) $A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x&1\\1&-1-x\end{pmatrix}$; $\det(A-xI_2)=(1-x)(-1-x)-1=$
$=-1+x-x+x^2-1=x^2-2$

$x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt2$

c) $A^2=2I_2 \Rightarrow A^4=(2I_2)^2=4I_2$

$\left.\begin{array}{l}A^4\cdot X=4I_2\cdot X=4X\\ X\cdot A^4=X\cdot 4I_2=4X\end{array}\right\} \Rightarrow A^4X=XA^4,\ \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

② a) $\left.\begin{array}{l}a+b\sqrt2=3+2\sqrt2 \Rightarrow \begin{cases}a=3\in\mathbb{Z}\\ b=2\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ a^2-2b^2=9-2\cdot4=1\end{array}\right\} \Rightarrow 3+2\sqrt2\in G$

b) $x,y\in G$; $x=a_1+b_1\sqrt2$; $a_1^2-2b_1^2=1$
$y=a_2+b_2\sqrt2$; $a_2^2-2b_2^2=1$

$xy=a_1a_2+2b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt2$

$(a_1a_2+2b_1b_2)^2-2(a_1b_2+a_2b_1)^2=a_1^2a_2^2+\cancel{4a_1a_2b_1b_2}+4b_1^2b_2^2-$
$-2a_1^2b_2^2-\cancel{4a_1b_2a_2b_1}-2a_2^2b_1^2=a_1^2(a_2^2-2b_2^2)-2b_1^2(a_2^2-2b_2^2)=$
$=a_1^2\cdot1-2b_1^2\cdot1=a_1^2-2b_1^2=1. \Rightarrow x\cdot y\in G.$

c) $e=1+0\sqrt2\in G$. $x\in G$, $x=a+b\sqrt2$; $a^2-2b^2=1$.
$xx'=x'x=e$; $x'=a'+b'\sqrt2$; $aa'+2bb'+(ab'+ba')\sqrt2=1+0\sqrt2$

$\begin{cases}aa'+2bb'=1\ |(-b)\\ ba'+ab'=0\ |(a)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-aa'b-2b^2b'=-b\\ +aa'b+a^2b'=0\end{cases}$
$/\quad b'\underbrace{(a^2-2b^2)}_{1}=-b \Rightarrow b'=-b$

$ba'=ab \Rightarrow a'=a$

$x^{-1}=a'+b'\sqrt2=a-b\sqrt2$
$a^2-2(-b)^2=1$

$\forall x\in G,\ \exists x^{-1}=a-b\sqrt2\in G$ a.î. $x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=e$

V043 43

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $O_3\in\mathcal{M}$.

5p b) Să se demonstreze că produsul a două matrice din $\mathcal{M}$ este o matrice din $\mathcal{M}$.

5p c) Știind că $A\in\mathcal{M}$ și $\det(A)=0$, să se demonstreze că $A^3=O_3$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p a) Pentru $a=c=1$ și $b=-1$ să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+1.

5p b) Să se determine numerele a, b, c știind că restul împărțirii polinomului f la X^2+1 este X, iar restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este -1.

5p c) Să se demonstreze că dacă $a\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, atunci f nu are toate rădăcinile reale.

① a) $a=b=c=d=0\in\mathbb{R} \Rightarrow O_3\in\mathcal{M}$

b) $A_1,A_2\in\mathcal{M}$ $A_1A_2=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2+b_1a_2 & a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2 \\ 0 & a_1a_2 & a_1d_2+d_1a_2 \\ 0 & 0 & a_1a_2\end{pmatrix} \Rightarrow A_1A_2\in\mathcal{M}$

c) $A\in\mathcal{M} \Rightarrow \det(A)=a^3$; $\det(A)=0 \Rightarrow a^3=0 \Rightarrow a=0$

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$

② a) $f=x^4-x^3+x^2-x+1=x^2(x^2+1)-x(x^2+1)+1=(x^2-x)(x^2+1)+1$

$q=x^2-x$; $r=1$.

b)
$$\begin{array}{l|l} x^4-x^3+ax^2+bx+c & x^2+1 \\ \hline -x^4 \qquad -x^2 & x^2-x+(a-1) \\ \quad / \ -x^3+(a-1)x^2+bx+c & \\ \quad\ \ x^3 \qquad\qquad +x & \\ \quad / \ (a-1)x^2+(b+1)x+c & \\ \quad -(a-1)x^2 \qquad\quad -a+1 & \\ \quad / \ (b+1)x+c-a+1 & \end{array}$$

$r=x$

$(b+1)x+c-a+1=x \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b+1=1 \Rightarrow b=0 \\ -a+c+1=0\end{cases}$

$f(1)=-1 \Rightarrow a+b+c=-1$

$\begin{cases} -a+c=-1 \\ a+c=-1\end{cases}$

$/ \ 2c=-2$

$\begin{cases} a=b=0 \\ c=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a\end{cases}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_3x_4)=1$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1-2a<0, \forall a>\frac{1}{2} \Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale

V044

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

5p a) Știind că $ad = 4$ și $bc = 3$, să se calculeze $\det(A)$

5p b) Să se calculeze $A \cdot A^t$.

5p c) Să se demonstreze că dacă *suma elementelor matricei* $A \cdot A^t$ *este egală cu 0*, atunci $\det(A) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

5p a) Să se calculeze suma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

5p b) Să se determine rădăcinile polinomului f știind că $a = -1$, $b = -2$ și $c = 0$.

5p c) Știind că rădăcinile polinomului f sunt în progresie aritmetică, să se demonstreze că $b = a - 1$.

① a) $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 4 - 3 = 1$.

b) $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

c) $S = a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd = (a+c)^2+(b+d)^2$

$S = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=-d \end{cases}$

$\det(A) = ad - bc = a(-b) - b\cdot(-a) = -ab + ab = 0$

② a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$

b) $f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = x^3(x+2) - x(x+2) = (x+2)(x^3 - x) =$

$= x(x^2-1)(x+2) = x(x-1)(x+1)(x+2)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$

c) $\div x_1; x_2; x_3; x_4$

$\left.\begin{matrix} x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = -1$.

$\begin{cases} \underline{x_1x_2} + \underline{x_1x_3} + x_1x_4 + x_2x_3 + \underline{x_2x_4} + \underline{x_3x_4} = a \\ x_1x_2x_3 + \underline{x_1x_2x_4} + \underline{x_1x_3x_4} + x_2x_3x_4 = -b \\ x_1x_2x_3x_4 = c \end{cases}$

$\begin{cases} (x_1+x_4)(x_2+x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 = a \\ x_1x_4(x_2+x_3) + x_2x_3(x_1+x_4) = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1x_4 + x_2x_3 = a-1 \\ -x_1x_4 - x_2x_3 = -b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_4 + x_2x_3 = a-1 \\ x_1x_4 + x_2x_3 = b \end{cases} \Rightarrow b = a-1$

V045 45

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Să se calculeze A^2.

5p **b)** Să se verifice că $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$.

5p **c)** Ştiind că $a+d\neq 0$ şi $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2M=MA^2$, să se demonstreze că $AM=MA$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-2X^2+aX+b$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Pentru $a=1$ şi $b=0$ să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, să se arate că $a=1$.

5p **c)** Ştiind că $f=(X-x_1^2)(X-x_2^2)(X-x_3^2)$, să se determine numerele reale a şi b.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}$

b) $(a+d)A-(ad-bc)I_2=\begin{pmatrix}a^2+ad&ab+bd\\ac+cd&ad+d^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&d^2+bc\end{pmatrix}=A^2$

c) $A^2=(a+d)A-(ad-bc)I_2$

$\left.\begin{array}{l}A^2M=(a+d)AM-(ad-bc)I_2M=(a+d)AM-(ad-bc)M\\ MA^2=(a+d)MA-(ad-bc)MI_2=(a+d)MA-(ad-bc)M\end{array}\right\}\Rightarrow$

$A^2M=MA^2$; $(a+d)\neq 0$

$\Rightarrow (a+d)AM=(a+d)MA\Rightarrow AM=MA$

② a) $f=x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

$x(x-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a\\x_1x_2x_3=-b\end{cases}$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2$

$\left.\begin{array}{l}x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a=4\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=2\end{array}\right\}\Rightarrow 4-2a=2$

$a=1.$

c) $f=(x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2)=x^3-x^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x(x_1^2x_2^2+$
$+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2$

$f=x^3-2x^2+ax+b$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=2=x_1+x_2+x_3\Rightarrow a=1.$

$\left.\begin{array}{l}-x_1^2x_2^2x_3^2=b\\x_1^2x_2^2x_3^2=(-b)^2 \text{ din (b)}\end{array}\right\}\Rightarrow b^2=-b\Rightarrow b^2+b=0;\ b(b+1)=0$

$b_1=0;\ b_2=-1$

$a=1;\ b_1=0;\ b_2=-1.$

V046

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{M(x,y)\,|\,M(x,y)=xI_2+yA,\ x,y\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se determine inversa matricei $M(1,1)$.

5p **c)** Să se determine matricele inversabile din mulţimea G.

2. În mulţimea $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+pX^2+1$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3 şi $p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-p)$.

5p **b)** Să se determine $p\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.

5p **c)** Să se calculeze în funcţie de $p\in\mathbb{R}$ suma $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4 & -2+2\\ 8-8 & -4+4\end{pmatrix}=O_2$

b) $M(1;1)=1\cdot I_2+1\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

$\det M(1;1)=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-3+4=1\neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$M^t=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; $M^*=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; $M^{-1}=\frac{1}{\det M}\cdot M^*=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$

c) $M(x,y)=xI_2+yA=\begin{pmatrix}x+2y & -y\\ 4y & x-2y\end{pmatrix}$

$\det M(x,y)=(x+2y)(x-2y)+4y^2=x^2-4y^2+4y^2=x^2$

$\det M(x,y)\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 0\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow M(x,y)$ este inversabilă pt $x\neq 0$

② a) $f(-p)=-p^3+p^3+1=1.$

b) $X-1\,|\,f\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow 1+p+1=0\Rightarrow p=-2$

c) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-p\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0\\ x_1x_2x_3=-1\end{cases}$

$(x_1+x_2+x_3)^2=(-p)^2$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}_{0}=p^2$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=p^2$

$\begin{cases}x_1^3+px_1^2+1=0\\ x_2^3+px_2^2+1=0\\ x_3^3+px_3^2+1=0\end{cases}$

$\begin{cases}x_1^4+px_1^3+x_1=0\\ x_2^4+px_2^3+x_2=0\\ x_3^4+px_3^3+x_3=0\end{cases}$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+p\cdot p^2+3=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-p^3-3$

$x_1^4+x_2^4+x_3^4+p(-p^3-3)-p=0$

$x_1^4+x_2^4+x_3^4=p^4+4p$

V047 47

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine matricea A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3 = 4A^2 - 5A + 2I_3$, unde $A^3 = A^2 \cdot A$.

5p **c)** Să se determine numerele reale m, n, p astfel încât $A^{-1} = mA^2 + nA + pI_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

2. Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că:

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2}$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2$.

5p **a)** Să se calculeze $x_1x_2x_3$.

5p **b)** Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile x_1, x_2, x_3.

5p **c)** Să se descompună polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 4$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}[X]$.

① a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$4A^2 - 5A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^3$

c) $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$mA^2 + nA + pI_3 = \begin{pmatrix} 4m+2n+p & 0 & 0 \\ 0 & m+n+p & 0 \\ 0 & 2m+n & m+n+p \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 4m+2n+p = \frac{1}{2} \\ m+n+p = 1 \\ 2m+n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2};\ n = -2;\ p = \frac{5}{2}$

② a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}{x_1x_2x_3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1x_2x_3 = \frac{2\cdot(-2)}{1} = -4$

b) $\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a = 2 \\ s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b = -2 \\ s_3 = x_1x_2x_3 = -c = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

c) $f = x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = x^2(x-2) - 2(x-2) = (x^2-2)(x-2) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)$

V048

48

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Se notează $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze X^2.

5p b) Să se determine inversa matricei X.

5p c) Să se determine numărul real r astfel încât $X^3=3X^2+rX+I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2^{x+y}$.

5p a) Să se calculeze $2009\circ(-2009)$.

5p b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x\circ x^2=64$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $(x\circ y)\circ z=2^{z+1}$, atunci $x=-y$.

1) a) $X^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $X^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\det X=1\neq0 \Rightarrow \exists X^{-1}=\frac{1}{\det X}\cdot X^*$

$X^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $X^{-1}=\frac{1}{1}\cdot X^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) $X^3=X^2\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

$3X^2+rX+I_3=\begin{pmatrix}4+r&6+r&9+r\\0&4+r&6+r\\0&0&4+r\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\begin{cases}4+r=1\\6+r=3\\9+r=6\end{cases}$ $r=-3$

2) a) $2009\circ(-2009)=2^{2009-2009}=2^0=1$.

b) $x\circ x^2=64\Rightarrow 2^{x+x^2}=64\Rightarrow 2^{x+x^2}=2^6\Rightarrow x^2+x-6=0$

$\Delta=1+24=25;\ x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}=\Big\langle\begin{matrix}x_1=-3\\x_2=2\end{matrix}$

c) $(x\circ y)\circ z=2^{x+y}\circ z=2^{2^{x+y}+z}$

$2^{2^{x+y}+z}=2^{z+1}\Rightarrow 2^{x+y}+z=z+1\Rightarrow 2^{x+y}=1\Rightarrow x+y=0\Rightarrow$
$\Rightarrow x=-y$

V049

49

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(M_1 + M_2)$.

5p **b)** Să se calculeze M_a^2, unde $M_a^2 = M_a \cdot M_a$.

5p **c)** Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M_a X = X M_a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

5p **a)** Să se calculeze $x * 0$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea „$*$" este asociativă.

5p **c)** Știind că $x_0 \in \mathbb{Q}$ și $x_n = x_0 * x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că $x_3 \notin \mathbb{Q}$.

① a) $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(M_1+M_2) = 4 - 0 = 4$.

b) $M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ $M_a X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x+az & y+at \\ z & t \end{pmatrix}$; $X M_a = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & ax+y \\ z & az+t \end{pmatrix}$

$M_a X = X M_a \Rightarrow \begin{cases} x+az = x \\ y+at = ax+y \\ az+t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az = 0 \Rightarrow z = 0 \\ at = ax \Rightarrow t = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

② a) $x * 0 = \sqrt[3]{x^3 + 0^3} = x$

b) $\left.\begin{array}{l} x*(y*z) = x * \sqrt[3]{y^3+z^3} = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3+z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3} \\ (x*y)*z = \sqrt[3]{x^3+y^3} * z = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x^3+y^3})^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x*(y*z) = x*(y*z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

c) $x_1 = x_0 * x_{1-1} = x_0 * x_0 = \sqrt[3]{x_0^3 + x_0^3} = x_0\sqrt[3]{2}$

$x_2 = x_0 * x_1 = \sqrt[3]{x_0^3 + (\sqrt[3]{2x_0^3})^3} = \sqrt[3]{x_0^3 + 2x_0^3} = \sqrt[3]{3x_0^3} = x_0\sqrt[3]{3}$

$x_3 = x_0 * x_2 = \sqrt[3]{x_0^3 + (\sqrt[3]{3x_0^3})^3} = \sqrt[3]{x_0^3 + 3x_0^3} = \sqrt[3]{4x_0^3} = x_0\sqrt[3]{4} \Rightarrow$

 $\Rightarrow x_3 \notin \mathbb{Q}$

V049

V050

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ și matricea $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $I_2\in\mathcal{M}$.

5p **b)** Știind că $A,B\in\mathcal{M}$, să se arate că $A+B\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\det(AB-BA)\le 0$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{f\in\mathbb{Z}_3[X] \mid f=X^2+aX+b\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{1})$ pentru $a=b=\hat{1}$.

5p **b)** Să se determine $a,b\in\mathbb{Z}_3$ pentru care $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}$.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

① a) $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ pt $a=1;\ b=c=0$

b) $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}$; $B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}$

$A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}$; $a_1+a_2;\ b_1+b_2;\ c_1+c_2\in\mathbb{R}$

c) $AB=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ c_1a_2+a_1c_2 & c_1b_2+a_1a_2 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2a_1+b_2c_1 & a_2b_1+b_2a_1 \\ c_2a_1+a_2c_1 & c_2b_1+a_2a_1 \end{pmatrix}$

$AB-BA=\begin{pmatrix} b_1c_2-b_2c_1 & 0 \\ 0 & b_2c_1-b_1c_2 \end{pmatrix}$

$\det(AB-BA)=-(b_1c_2-b_2c_1)^2\le 0,\ \forall A,B\in\mathcal{M}$

② a) $a=b=\hat{1}$; $f=X^2+X+\hat{1}$; $f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}=\hat{0}$

b) $f(\hat{0})=b$; $f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{a}+\hat{b}$; $f(\hat{0})=f(\hat{1})=\hat{1}\Rightarrow\begin{cases} b=\hat{1} \\ \hat{1}+a+b=\hat{1}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} b=\hat{1} \\ a+b=\hat{0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-\hat{1}=\widehat{3-1}=\hat{2} \\ b=\hat{1}\end{cases}$; $\begin{cases} a=\hat{2} \\ b=\hat{1}\end{cases}$

c) $a,b\in\mathbb{Z}_3=\{\hat{0};\hat{1};\hat{2}\}$. Pt fiecare valoare a lui $a\in\{\hat{0};\hat{1};\hat{2}\}$, b poate lua orice valoare din $\{\hat{0};\hat{1};\hat{2}\}$ adică $3\cdot 3=9$ posibilități $\Rightarrow$ Mulțimea M are 9 elemente

V051

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $H(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a>0$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(H(a)), \forall a>0$.

5p **b)** Să se arate că $H(a)\cdot H(b)=H(a\cdot b),\ \forall a,b>0$.

5p **c)** Să se calculeze determinantul matricei $H(1)+H(2)+H(3)+\ldots+H(2008)$. ?

2. Pe mulțimea $G=(2,\infty)$ se consideră operația $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că toate elementele mulțimii G sunt simetrizabile, în raport cu legea "$\circ$".

① a) $\det(H(a))=\begin{vmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a,\ \forall a>0$

b) $H(a)\cdot H(b)=\begin{pmatrix}1 & \ln a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \ln b & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \ln a+\ln b & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & \ln(ab) & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & ab\end{pmatrix}=H(a\cdot b),\ \forall a,b>0$

c) $H(1)+H(2)+\dots+H(2008)=\begin{pmatrix}2008 & \ln 1+\ln 2+\dots+\ln 2008 & 0\\ 0 & 2008 & 0\\ 0 & 0 & 1+2+\dots+2008\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2008 & \ln(1\cdot 2\cdots 2008) & 0\\ 0 & 2008 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2008(1+2008)}{2}\end{pmatrix}$; $\det(H(1)+H(2)+\dots+H(2008))=$

$=2008\cdot 2008\cdot 1004\cdot 2009$

② a) $(x-2)(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=xy-2(x+y)+6=x\circ y,\ \forall x,y\in G$

b) $x,y\in G;\ \begin{cases}x>2\Rightarrow x-2>0\\ y>2\Rightarrow y-2>0\end{cases}\Rightarrow (x-2)(y-2)>0\Rightarrow xy-2(x+y)+4>0\ |+2$

$xy-2(x+y)+6>2\Rightarrow x\circ y\in G,\ \forall x,y\in G.$

c) $x\in G,\ x\circ e=e\circ x=x;\ (x-2)(e-2)+2=x;\ (x-2)(e-2)-(x-2)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(e-3)=0\Rightarrow e=3.$

$x\circ x'=x'\circ x=3;\ (x-2)(x'-2)+2=3;\ x'-2=\frac{1}{x-2};\ x'=2+\frac{1}{x-2}>2$

$\forall x\in G,\ \exists x'=2+\frac{1}{x-2}\in G$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=e$

V052

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Se notează $A^n = \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det(A^{10})$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $B=A+I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operaţia $x\circ y=x^{3\ln y}$.

5p **a)** Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x\circ e=8$, unde e este baza logaritmului natural.

5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru $\forall x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că operaţia „$\circ$" este asociativă pe mulţimea G.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&1+2\\2+4&2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\6&6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}=3A$

b) $A^2=3A$; $A^3=3A\cdot A=3A^2=2^2A$; $A^4=A^3\cdot A=3^2A\cdot A=3^3A$; ... $A^{10}=3^9A$

$\det(A^{10})=3^9\det(A)=3^9\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0$

c) $B=A+I_2=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$; $\det(B)=6-2=4\neq0\Rightarrow\exists B^{-1}$

$B^t=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$; $B^*=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&2\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&2\end{pmatrix}$

② a) $x\circ e=x^{3\ln e}=x^3$; $x^3=8\Rightarrow x^3=2^3\Rightarrow x=2$

b) $x,y\in G\Rightarrow\begin{cases}x>0,\ x\neq1\\ y>0,\ y\neq1\end{cases}\Rightarrow x^{3\ln y}>0;\ x^{3\ln y}\neq1\Rightarrow x\circ y\in G,\ \forall x,y\in G.$

c) $(x\circ y)\circ z=x^{3\ln y}\circ z=\left(x^{3\ln y}\right)^{3\ln z}=x^{9\ln y\ln z}$

$x\circ(y\circ z)=x\circ y^{3\ln z}=x^{3\ln\left(y^{3\ln z}\right)}=x^{3\cdot3\ln z\cdot\ln y}=x^{9\ln z\ln y}$

$\Rightarrow(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in G.$

V053

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n,n+2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se determine ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

2. În inelul $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3-X-5$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care restul împărțirii polinomului f la $X-a$ este -5.

5p **c)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

① a) $A_0(0;2)$; $A_1(1;3)$ $\quad A_0A_1: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$; $A_0A_1: 2x+y-2-3x=0$

$A_0A_1: -x+y-2=0 \mid (-1)$

$A_0A_1: x-y+2=0$

b) $A_2(2;4)$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4+4-6-2=0 \Rightarrow A_0, A_1, A_2$ – coliniare

c) $O(0;0)$; $A_n(n;n+2)$; $A_{n+1}(n+1;n+3)$ $\quad \mathcal{A}_{\Delta OA_nA_{n+1}}=\frac{1}{2}|\Delta|$

$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & n+2 & 1 \\ n+1 & n+3 & 1 \end{vmatrix} = n(n+3)-(n+1)(n+2)=n^2+3n-n^2-n-2n-2=$

$=-2$ $\quad \mathcal{A}_{\Delta OA_nA_{n+1}}=\frac{1}{2}|-2|=1$ – nu depinde de n

② a) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-5=\frac{-1+4-40}{8}=-\frac{37}{8}$

b) $r=f(a)$; $f(a)=-5$; $a^3-a-5=-5$; $a(a^2-1)=0$

$a(a-1)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=1 \\ a_3=-1 \end{cases}$

c) $f=x^3-x-5$; $x_1+x_2+x_3=0$

$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_2+x_3+x_1 & x_3 & x_1 \\ x_3+x_1+x_2 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=$

$=\underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{0}\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$

V054

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

5p a) Să se arate că pentru orice m număr real tripletul $(0;3;1)$ este soluție a sistemului.

5p b) Să se determine valorile parametrului real m pentru care sistemul admite soluție unică.

5p c) Pentru $m \neq 3$ să se rezolve sistemul.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p a) Să se arate că $x * y = 2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x * 5^x = 11$.

5p c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea "$*$".

① a) $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 0-6+3=-3 \text{ adev} \\ 0+3+1=4 \text{ adev} \\ 0-3+4=1 \text{ adev} \end{cases} \Rightarrow (0;3;1)$ soluția sistemului $\forall m \in \mathbb{R}$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4-2m-6-3m+1+16 = -5m+15$

pt soluție unică $\Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow -5m+15 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \neq 3; \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) $\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix} = 45-15m; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 15-5m \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{15(3-m)}{5(3-m)} = 3; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{15-5m}{-5m+15} = 1.$

$x=0; \; y=3; \; z=1.$

② a) $2(x-3)(y-3)+3 = 2xy-6x-6y+18+3 = 2xy-6x-6y+21 = x*y, \; \forall x,y \in \mathbb{R}$

b) $5^x * 5^x = 2(5^x-3)(5^x-3)+3 = 2(5^x-3)^2+3$

$2(5^x-3)^2+3=11; \; 2(5^x-3)^2=8; \; (5^x-3)^2=4 \Rightarrow 5^x-3=\pm 2$

$5^x-3=2 \Rightarrow 5^x=5 \Rightarrow x_1=1; \quad 5^x-3=-2 \Rightarrow 5^x=1 \Rightarrow x_2=0$

$x_1=1; \; x_2=0$

c) $x \in \mathbb{R}; \; x*e=e*x=x; \; 2(x-3)(e-3)+3=x; \; 2(x-3)(e-3)-(x-3)=0$

$(x-3)(2e-6-1)=0; \; (x-3)(2e-7)=0 \Rightarrow e=\frac{7}{2}$

$x*x'=x'*x=e; \; 2xx'-6x-6x'+21=\frac{7}{2}; \; 2x'(x-3)=6x+\frac{7}{2}-21$

$2x'(x-3)=\frac{12x-35}{2}$ pt $x \neq 3 \Rightarrow x'=\frac{12x-35}{4(x-3)}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}; \; \exists x'=\frac{12x-35}{4(x-3)} \in \mathbb{R}$ a.î. $x*x'=x'*x=e$

V055

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Se notează $A^n=\underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $A+A^2=2A$.

5p **b)** Să se determine matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X+A)=2$.

5p **c)** Știind că $A^n=A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A+2A^2+\ldots+nA^n=\frac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+1$, $f\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

Se notează $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine numărul real m astfel încât $x_1=2$.

5p **b)** Să se arate că $S_3+S_2+mS_1+3=0$.

5p **c)** Să se arate că pentru orice număr par $m\in\mathbb{Z}$ polinomul f nu are rădăcini raționale.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-12 & -24+18\\ 8-6 & -12+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=A$

$A+A^2=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=A+A=2A$

b) $X+A=\begin{pmatrix}x+4 & -6\\ 2 & x-3\end{pmatrix}$; $\det(X+A)=(x+4)(x-3)+12=x^2+4x-3x-12+12=$
$=x^2+x$

$x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0$; $\Delta=9$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}x_1=-2\\ x_2=1\end{cases}$

$X_1=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; $X_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

c) $A+2A^2+\ldots+nA^2=A+2A+\ldots+nA=(1+2+\ldots+n)A=$
$=\frac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

② a) $x_1=2 \Rightarrow f(2)=0 \Rightarrow 8+4+2m+1=0 \Rightarrow 2m=-13$; $m=-\frac{13}{2}$

b) $\begin{cases}x_1^3+x_1^2+mx_1+1=0\\ x_2^3+x_2^2+mx_2+1=0\\ x_3^3+x_3^2+mx_3+1=0\end{cases}$

$(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+m(x_1+x_2+x_3)+3=0 \Rightarrow S_3+S_2+mS_1+3=0$

c) Pot fi rădăcini raționale divizorii lui 1; adică ±1.
dacă $x_1=1$; $1^3+1^2+m+1=0 \Rightarrow m=-3$; nu este nr. par
dacă $x_2=-1$; $(-1)^3+(-1)^2+m(-1)+1=0$; $-m+1=0 \Rightarrow m=1$ nu este nr. par.

deci $\forall m\in\mathbb{Z}$, m - nr par, f nu are rădăcini raționale

V056

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=7A$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-6I_2$ şi $A^2=A\cdot A$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$ şi $g=X^3+X^2+X+1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $f=X\cdot g+1$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului g.

5p **c)** Să se calculeze $f(a)$, ştiind că a este o rădăcină a polinomului g.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7$

b) $A^2=A\cdot A\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3 & 6-6\\ 2-2 & 3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=7I_2$

$A^3=A^2\cdot A=7I_2\cdot A=7A$

c) $B=A^2-6I_2$; $A\cdot B=A(A^2-6I_2)=A^3-6AI_2=A^3-6A=$

$=7A-6A=A$

② a) $f=x(x^3+x^2+x+1)+1=x\cdot g+1$

b) pot fi rădăcini întregi ±1

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	1	1	1
-1	1	0	1	$\boxed{0}$

$\Rightarrow x_1=-1$ $\qquad x_1=-1$

$g=x^2+1$; $x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x_{2,3}\notin\mathbb{R}$

c) $f=x\cdot g+1$; $g(a)=0$

$f(a)=a\cdot g(a)+1=a\cdot0+1=1$; $f(a)=1$.

V057

SUBIECTUL II (30p)

1. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $A(1)\cdot A(-1)$.

5p **b)** Să se arate că $\left(A(x)\right)^2=A\left((x+1)^2-1\right)$, pentru orice x real, unde $\left(A(x)\right)^2=\left(A(x)\right)\cdot\left(A(x)\right)$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $A(1)$.

2. Fie mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă 0 și 1 aparțin mulțimii G.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in G$ avem $x\cdot y\in G$.

5p **c)** Să se arate că dacă $x\in G$, atunci $\frac{1}{x}\in G$.

① a) $A(1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 10 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -10 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24+20 & 12-10\\ -40+30 & 20-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -10 & 5\end{pmatrix}=$
$=A(-1)$

b) $A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5x^2+10x+1 & -2x^2-4x\\ 10x^2+20x & -4x^2-8x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5(x^2+2x) & -2(x^2+2x)\\ 10(x^2+2x) & 1-4(x^2+2x\end{pmatrix}=A(x^2+2x)=$

$=A(x^2+2x+1-1)=A((x+1)^2-1)$

c) $A^t(1)=\begin{pmatrix}6 & 10\\ -2 & -3\end{pmatrix}$; $\det(A(1))=\begin{vmatrix}6 & -2\\ 10 & -3\end{vmatrix}=-18+20=2\neq 0\Rightarrow\exists A^{-1}(1)$

$A^*(1)=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -10 & 6\end{pmatrix}$; $A^{-1}(1)=\frac{1}{\det(A(1))}\cdot A^*(1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -10 & 6\end{pmatrix}$

② a) $0=0+0\sqrt{3}$; $a=b=0$; $0^2-3\cdot0^2=0\neq1\Rightarrow 0\notin G$.
$1=1+0\sqrt{3}$; $a=1; b=0$; $1^2-3\cdot0^2=1\Rightarrow 1\in G$.

b) $x,y\in G$; $x=a+b\sqrt{3}$; $a^2-3b^2=1$; $y=c+d\sqrt{3}$; $c^2-3d^2=1$.
$x\cdot y=(ac+3bd)+(ad+cb)\sqrt{3}=m+n\sqrt{3}$; $m,n\in\mathbb{Z}$
$m^2-3n^2=a^2c^2+6abcd+9b^2d^2-3a^2d^2-6abcd-3c^2b^2=$
$=a^2\underbrace{(c^2-3d^2)}_{1}-3b^2\underbrace{(c^2-3d^2)}_{1}=a^2-3b^2=1\Rightarrow x\cdot y\in G;\ \forall x,y\in G$

c) $x\in G$, $x=a+b\sqrt{3}$; $a^2-3b^2=1\Rightarrow x\neq0$
$\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{a-b\sqrt{3}}{(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=a-b\sqrt{3}=$

$=a+(-b)\sqrt{3}$; $a^2-3(-b)^2=a^2-3b^2=1\Rightarrow\frac{1}{x}\in G$

V058

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=a \end{cases}$, cu $a \in \mathbb{Z}$. Se notează cu A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Pentru $a=1$ să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = x+y+1$.

5p **a)** Să se calculeze $2008 \circ 2009$.

5p **b)** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \le 3$.

5p **c)** Fie mulțimea $A=\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \ge 2 \text{ și } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n+6\right\}$. Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2-10-8+15=-5$

b) $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ $\Delta=-5$; $\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-4$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4$; $\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3$

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{5}$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{4}{5}$; $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{3}{5}$ $\quad \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=\frac{4}{5} \\ z=\frac{3}{5} \end{cases}$

c) $\Delta=-5$; $\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix}=-9a+5$; $\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=-14a+10$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}=-13a+10$

$\begin{cases} x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-9a+5}{-5}=\frac{9a}{5}-1 \in \mathbb{N} \text{ pt } a \text{ multiplu de } 5 \\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-14a+10}{-5}=\frac{14a}{5}-2 \in \mathbb{N} \text{ pt } a \text{ multiplu de } 5 \\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-13a+10}{-5}=\frac{13a}{5}-2 \in \mathbb{N} \text{ pt } a \text{ multiplu de } 5 \end{cases}$

deci $x, y, z \in \mathbb{N}$ pt $\underline{a=5}$

② a) $2008 \circ 2009 = 2008+2009+1 = 4018$

b) $x+x^2+1 \le 3$; $x^2+x-2 \le 0$; $\Delta=1+8=9$; $x_{1,2}=\frac{-1 \pm 3}{2} = \langle\; x_1=-2,\; x_2=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in [-2, 1]$

c) $C_n^0=1$; $C_n^1=n$; $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$

$C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = (1+n+1) \circ \frac{n^2-n}{2} = (1+n+1) + \frac{n^2-n}{2} + 1 =$

V059

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A.

5p b) Să se calculeze A^2 știind că $A^2=A\cdot A$.

5p c) Să se calculeze inversa matricei I_3+A.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-pX^2+qX-r$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $f(0)-f(1)$.

5p b) Să se calculeze expresia $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$ în funcție de p,q,r.

5p c) Să se arate că polinomul $g=X^3+X^2+X-1$ nu are toate rădăcinile reale.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c) $B=I_3+A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $\det(B)=\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq0 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$B^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

② a) $f(0)=-r$; $f(1)=1-p+q-r$; $f(0)-f(1)=-r-1+p-q+r=p-q-1$

b) $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3) \Rightarrow (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=$
$=1-p+q-r$

c) x_1, x_2, x_3 - rădăcini pt g

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-1\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=1\\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=1\end{cases}$$

$(x_1+x_2+x_3)^2=(-1)^2$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}_{1}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2=-1<0 \Rightarrow$ nu toate rădăcinile sunt reale

V 060

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA=AX\}$.

5p **a)** Să se determine numerele reale a și b astfel încât $A\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A\cdot B=A$, unde $B=A^2-2I_2$ și $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se rezolve în G ecuația $x*x=\dfrac{4}{5}$.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $x*y=\dfrac{(x+1)(y+1)-(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se arate că pentru oricare $x,y\in G$ rezultă că $x*y\in G$.

① a) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{3}\\ a=1\end{cases}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3I_2$

$B=A^2-2I_2=3I_2-2I_2=I_2 \Rightarrow A\cdot B=A\cdot I_2=A$

c) $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in C(A) \Rightarrow XA=AX \Rightarrow \begin{pmatrix}x_2 & 3x_1\\ x_4 & 3x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_3 & 3x_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2=3x_3$; $x_1=x_4$ luăm $x_1=a$; $x_3=b$; $X=\begin{pmatrix}a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}$

② a) $x*x=\dfrac{2x}{1+x^2}$; $\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{4}{5}$; $4+4x^2=10x$; $4x^2-10x+4=0 \mid :2$

$2x^2-5x+2=0$; $\Delta=25-16=9$; $x_{1,2}=\dfrac{5\pm3}{4}=\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\in G\\ x_2=2\notin G.\end{cases}$

$x=\frac{1}{2}$ soluție

b) $\dfrac{xy+x+y+1-xy+x+y-1}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=\dfrac{2x+2y}{2+2xy}=\dfrac{2(x+y)}{2(1+xy)}=\dfrac{x+y}{1+xy}=$

$=x*y,\ \forall x,y\in G$

c) $x,y\in G \Rightarrow \begin{cases}-1<x<1\\ -1<y<1\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}-1<x\\ -1<y\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}0<x+1\\ 0<y+1\end{cases} \Rightarrow (x+1)(y+1)>0 \Rightarrow xy+x+y+1>0 \Rightarrow x+y>-(1+xy)$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{1+xy}>-1 \Rightarrow x*y>-1$ ①

$\begin{cases}x-1<0\\ y-1<0\end{cases} \Rightarrow (x-1)(y-1)>0 \Rightarrow xy-x-y+1>0;\ -(x+y)>-(1+xy) \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y<1+xy \Rightarrow \dfrac{x+y}{1+xy}<1 \Rightarrow x*y<1$ ②

din ① și ② $\Rightarrow -1<x*y<1 \Rightarrow x*y\in G,\ \forall x,y\in G$

V061

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X(a) \mid a\in\mathbb{R} \text{ și } X(a)=I_2+aA\right\}$.

5p **a)** Să se verifice dacă I_2 aparține mulțimii G.

5p **b)** Să se arate că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+5ab)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că pentru $a\neq -\frac{1}{5}$ inversa matricei $X(a)$ este matricea $X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$, $f=\hat{3}X^3+\hat{4}X^2+\hat{3}X+\hat{2}$ și $g=X^2+\hat{2}X$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{1})\cdot g(\hat{0})$.

5p **b)** Să se verifice că $f=(\hat{3}X+\hat{3})\cdot g+\hat{2}X+\hat{2}$.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

① a) $I_2 = I_2 + 0\cdot A = X(0)\in G$ pt $a=0$

b) $X(a)\cdot X(b) = (I_2+aA)(I_2+bA) = I_2^2 + aAI_2 + bAI_2 + abA^2 =$

$= I_2 + aA + bA + abA^2$

$A^2 = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20 & 5\\ 20 & 5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix} = 5A$

$X(a)\cdot X(b) = I_2 + aA + bA + ab\cdot 5A = I_2 + (a+b+5ab)A =$

$= X(a+b+5ab)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$

c) $X(a)\cdot X\left(\frac{-a}{1+5a}\right) = X\left(a - \frac{a}{1+5a} + 5a\cdot\frac{-a}{1+5a}\right) = X\left(\frac{a+5a^2-a-5a^2}{1+5a}\right) =$

$= X(0) = I_2 \Rightarrow [X(a)]^{-1} = X\left(\frac{-a}{1+5a}\right)$; $\forall a\neq -\frac{1}{5}$

② a) $f(\hat{1}) = \hat{3}+\hat{4}+\hat{3}+\hat{2} = \hat{2}$; $g(\hat{0}) = \hat{0}^2 + 2\cdot\hat{0} = \hat{0}$

$f(\hat{1})\cdot g(\hat{0}) = \hat{2}\cdot\hat{0} = \hat{0}$

b) $(\hat{3}x+\hat{3})g + \hat{2}x + \hat{2} = (\hat{3}x+\hat{3})(x^2+\hat{2}x) + \hat{2}x + \hat{2} =$

$= \hat{3}x^3 + x^2 + \hat{3}x^2 + x + \hat{2}x + \hat{2} = \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + \hat{3}x + \hat{2} = f$

c) $f(\hat{0}) = \hat{2}\neq\hat{0}$; $f(\hat{1}) = \hat{2}\neq\hat{0}$; $f(\hat{2}) = \hat{3}\neq\hat{0}$; $f(\hat{3}) = \hat{3}\neq\hat{0}$

$f(\hat{4}) = \hat{0} \Rightarrow x_1 = \hat{4} \Rightarrow f$ are o singură rădăcină în $\mathbb{Z}_5$

V062

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x-y+mz=0 \\ 4x+y+5z=0 \end{cases}$, cu m parametru real şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A pentru $m=1$.

5p **b)** Să se determine parametrul real m ştiind că determinantul matricei sistemului este nul.

5p **c)** Pentru $m \neq -1$ să se rezolve sistemul.

2. Se consideră polinoamele $f = X^3+3X^2+3X+1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $g = X^2-2X+1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze diferenţa $S-S'$, unde $S = x_1+x_2+x_3$ şi $S' = y_1+y_2$.

5p **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la g.

5p **c)** Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

① a) $m=1$; $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & m \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5+4m+6+12-m-10 = 3m+3$

$m=1 \Rightarrow \det(A) = 3\cdot 1+3 = 6$

b) $\det(A)=0 \Rightarrow 3m+3=0 \Rightarrow m=-1$

c) $m \neq -1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow$ sistem omogen compatibil determinat $\Rightarrow x=y=z=0$

② a) $\left.\begin{array}{l} S = x_1+x_2+x_3 = -\frac{b}{a} = -3 \\ S' = y_1+y_2 = -\frac{b}{a} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow S-S' = -3-2 = -5$

b)
$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+3x+1 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^3+2x^2-x & x+5 \\ \quad /\ 5x^2+2x+1 & \\ \quad -5x^2+10x-5 & \\ \hline \quad /\ 12x-4 & \end{array}$$

$q = x+5$

$r = 12x-4$

c) $x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow y_1=y_2=1$.

$f(y_1)\cdot f(y_2) = f(1)\cdot f(1) = (1+3+3+1)^2 = 8^2 = 64$.

V063

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=A-I_3$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se calculeze A^2-B^2, unde $A^2=A\cdot A$ și $B^2=B\cdot B$

5p **c)** Să se arate că inversa matricei B este $B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea de compoziție $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine elementul neutru al legii „$\circ$".

5p **c)** Să se determine $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ astfel încât $C_n^2\circ C_n^2=13$.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{vmatrix}=+2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 3\\ -3 & 3 & 9\end{vmatrix}=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ -3 & 3 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 10 & 30\\ -20 & 20 & 60\\ -30 & 30 & 90\end{pmatrix}=10A$

$A^2-B^2=A^2-(A-I_3)^2=A^2-A^2+2AI_3-I_3^2=2A-I_3=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 6\\ -4 & 4 & 12\\ -6 & 6 & 18\end{pmatrix}-$

$-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 6\\ -4 & 3 & 12\\ -6 & 6 & 17\end{pmatrix}$

c) $B\cdot\left(\frac{1}{9}A-I_3\right)=(A-I_3)\left(\frac{1}{9}A-I_3\right)=\frac{1}{9}A^2-A-\frac{1}{9}A+I_3=$

$=\frac{1}{9}\cdot 10A-A-\frac{1}{9}A+I_3=\frac{10A-9A-A}{9}+I_3=I_3$

$B\cdot\left(\frac{1}{9}A-I_3\right)=I_3 \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{9}A-I_3$

② a) $(x+3)(y+3)-3=xy+3x+3y+9-3=xy+3x+3y+6=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x\circ e=e\circ x=x$; $(x+3)(e+3)-3=x$; $(x+3)(e+3)-(x+3)=0$

$(x+3)(e+2)=0 \Rightarrow e+2=0 \Rightarrow e=-2, \forall x\in\mathbb{R}$

$\exists e=-2\in\mathbb{R}$ a.î. $x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in\mathbb{R}$

c) $C_n^2\circ C_n^2=(C_n^2+3)(C_n^2+3)-3=(C_n^2+3)^2-3$

$(C_n^2+3)^2-3=13 \Rightarrow (C_n^2+3)^2=16 \Rightarrow C_n^2+3=4 \Rightarrow C_n^2=1.$

$\frac{n(n-1)}{2}=1$; $n^2-n-2=0$; $\Delta=9$; $n_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}=$

$=\begin{cases} n_1=2\\ n_2=-1\notin\mathbb{N}, \text{nu convine}\end{cases}$ $\quad n=2.$

V064

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B=I_2+A$. Se notează $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2=0_2$.

5p **b)** Să se calculeze inversa matricei B.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $B^3-B^2=xA$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-2X^2+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f este divizibil cu $g=X^2-1$.

5p **b)** Să se calculeze produsul $S\cdot P$ unde $S=x_1+x_2+x_3+x_4$ și $P=x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

5p **c)** Să se calculeze suma $T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-4 & 8-8\\ -2+2 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$

b) $B=I_2+A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; $\det(B)=-3+4=1\neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\cdot B^*$

$B^t=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$; $B^*=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; $B^{-1}=B^*=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

c) $B^3-B^2=B^2(B-I_2)=B^2(I_2+A-I_2)=B^2A=(I_2+A)^2\cdot A=$
$=(I_2^2+2I_2A+A^2)\cdot A=(I_2+2A+O_2)\cdot A=I_2A+2A^2=A+O_2=$
$=A$

$B^3-B^2=xA \Rightarrow A=xA \Rightarrow x=1.$

② a) $f=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$; $x^2-1 \Rightarrow f\,\vdots\, g$

b) $\left.\begin{array}{l} S=x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}=0\\ P=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}=1\end{array}\right\}\Rightarrow S\cdot P=0\cdot 1=0$

c) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-2\end{cases}$

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=0$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(-2)=0 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4$

$\begin{cases}x_1^4-2x_1^2+1=0\\ x_2^4-2x_2^2+1=0\\ x_3^4-2x_3^2+1=0\\ x_4^4-2x_4^2+1=0\end{cases}$

$(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4)-2\underbrace{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)}_{4}+4=0$

$T=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=8-4=4$; $T=4.$

V065

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $AB: x+2y-4=0$ și $BC: 3x+y-2=0$.

5p **a)** Să se determine coordonatele punctului B.

5p **b)** Pentru $A(4,0), B(0,2), C(1,-1)$ să se scrie ecuația medianei triunghiului ABC, duse din vârful C.

5p **c)** Pentru $A(4,0), B(0,2), C(1,-1)$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

5p **a)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

5p **b)** Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

5p **c)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.

① a) $\begin{cases}x+2y=4\\ 3x+y=2 \mid (-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=4\\ -6x-2y=-4\end{cases}$; $-5x \quad / = 0$; $\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}$ $AB \cap BC = \{B(0;2)\}$

b) $M \in (AB)$; $AM = MB$; $\begin{cases}x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} = \dfrac{4+0}{2} = 2\\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1\end{cases}$ $M(2;1)$

$CM: \begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$; $CM: -x+2y+1+2-x-y=0$

$CM: -2x+y+3=0 \mid (-1)$

$CM: 2x-y-3=0$

c) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 8-2+4 = 10$; $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$

② a) $S = \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7} = (\hat{1}+\hat{7})+(\hat{2}+\hat{6})+(\hat{3}+\hat{5})+\hat{4} = \hat{4}$

b) I mulțimea elementelor inversabile din $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$

$I = \{\hat{1}; \hat{3}; \hat{5}; \hat{7}\}$; $P = \hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7} = \hat{3}\cdot\hat{3} = \hat{1}$.

c) $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5} \mid \cdot\hat{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ x+\hat{6}y=\hat{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\hat{2}y+\hat{7}\\ \hat{2}(\hat{2}y+\hat{7})+\hat{5}y=\hat{2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\hat{2}y+\hat{7}\\ \hat{4}y+\hat{6}+\hat{5}y=\hat{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\hat{2}y+\hat{7}\\ y=\hat{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\hat{2}\cdot\hat{4}+\hat{7}\\ y=\hat{4}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\hat{7}\\ y=\hat{4}\end{cases}$

V 066

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A^2)$, știind că $A^2=A\cdot A$.

5p b) Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$ știind că $A\cdot B=I_2$.

5p c) Știind că $A\cdot B=I_2$ să se calculeze $S=(B^{-1}-A)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compoziție $x*y=x+y-3$ și $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x\circ x=12$.

5p b) Să se arate că $1\circ(2*3)=(1\circ 2)*(1\circ 3)$.

5p c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases}(x-3)*y=2\\ (x-y)\circ 4=10\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; $\det(A^2)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6-2=4$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2z & -y+2t\\ x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}-x+2z=1\\ -y+2t=0\\ x=0\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=\frac{1}{2}\\ t=\frac{1}{2}\end{cases}$

c) $A\cdot B=I_2\Rightarrow B^{-1}=A$; $S=(B^{-1}-A)^2=(A-A)^2=O_2$

② a) $x^2-3\cdot 2x+12=12$; $x^2-6x=0$; $x(x-6)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=6\end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{l}1\circ(2*3)=1\circ(2+3-3)=1\circ 2=2-3(1+2)+12=2-9+12=5\\ (1\circ 2)*(1\circ 3)=5*(3-3\cdot 4+12)=5*3=5+3-3=5\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1\circ(2*3)=(1\circ 2)*(1\circ 3)$

c) $\begin{cases}(x-3)+y-3=2\\ (x-y)\cdot 4-3(x-y+4)+12=10\end{cases}$ $x,y\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}x+y=8\\ 4x-4y-3x+3y-12+12=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=8\\ x-y=10\end{cases}$

$2x\ /=18\Rightarrow x=9$

$y=8-9=-1$

$\begin{cases}x=9\\ y=-1\end{cases}$

V067

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+2y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$ cu $a\in\mathbb{R}$ şi $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se notează $A^2 = A\cdot A$.

5p **a)** Pentru $a=-1$ să se rezolve sistemul.

5p **b)** Să se verifice egalitatea $A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=O_2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că matricea A verifică egalitatea $A^2=9I_2$.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y+11$.

5p **a)** Să se arate că legea de compoziţie „$\circ$" este asociativă.

5p **b)** Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 6 ori } x}=1$.

5p **c)** Să se demonstreze că $(\mathbb{Z},\circ)$ este grup comutativ.

① a) $a=-1$; $\begin{cases} -x+2y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-1-8=-9\neq 0 \Rightarrow$ sistem omogen, compatibil determinat $\Rightarrow x=y=0$

b) $A^2=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+8 & 2a+2 \\ 4a+4 & 8+1 \end{pmatrix}$

$A^2-(a+1)A+(a-8)I_2=\begin{pmatrix} a^2+8 & 2a+2 \\ 4a+4 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+a & 2a+2 \\ 4a+4 & a+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-8 & 0 \\ 0 & a-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O_2$

c) $A^2=9I_2$; $\begin{pmatrix} a^2+8 & 2a+2 \\ 4a+4 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a^2+8=9 \\ 2a+2=0 \\ 4a+4=0 \end{cases}\Rightarrow a=-1$.

② a) $\left.\begin{array}{l} (x\circ y)\circ z=(x+y+11)\circ z=x+y+z+22 \\ x\circ(y\circ z)=x\circ(y+z+11)=x+y+z+22 \end{array}\right\}\Rightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$

b) $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 6 ori}}=6x+55$; $6x+55=1\Rightarrow 6x=-54$, $x=-9$

c) $G_1)$ $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ (din a)

$G_2)$ $x\circ y=x+y+11=y+x+11=y\circ x$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$

$G_3)$ $x\circ e=x$; $x+e+11=x\Rightarrow e=-11\in\mathbb{Z}$

$\exists e=-11\in\mathbb{Z}$ a.î. $x\circ e=e\circ x=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

$G_4)$ $x\in\mathbb{Z}$, $x\circ x'=-11$; $x+x'+11=-11\Rightarrow x'=-x-22\in\mathbb{Z}$

$\forall x\in\mathbb{Z}$, $\exists x'=-x-22\in\mathbb{Z}$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=e$

din $G_1-G_4\Rightarrow(\mathbb{Z},\circ)$ grup comutativ

V068

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$ cu $x\in\mathbb{R}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A=A\cdot A$.

5p a) Să se determine numărul real x pentru care $\det(A)=0$.

5p b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.

5p c) Să se determine numărul real x pentru care $A^2=2A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=xy-2(x+y)+6$.

5p a) Să se arate că $x\circ y=(x-2)(y-2)+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că $x\circ 2=2$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p c) Știind că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009$.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix}=(x-3)^2-1=x^2-6x+8$

$x^2-6x+8=0$; $\Delta=4$; $x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=4 \end{cases}$

b) $A^2=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}$

$(2x-6)\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}-(x^2-6x+8)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-6x+10 & 2x-6 \\ 2x-6 & x^2-6x+10 \end{pmatrix}=A^2$

c) $A^2=2A \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+10=2x-6 \\ 2x-6=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$

② a) $(x-2)(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=xy-2(x+y)+6=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x\circ 2=(x-2)(2-2)+2=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) $E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009=2$ pt că $x\circ 2=2,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și legea „$\circ$" este asociativă

V069

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x,y\in\mathbb{R}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det(A)=0$.

5p **b)** Pentru $a=3$ să se verifice că $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a=3$ să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$.

2. Pe mulțimea $G=(-1,1)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

5p **a)** Să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Fie funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. Să se verifice că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru oricare $x,y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix}=2a-2-a=a-2$

$a-2=0 \Rightarrow a=2$

b) $a=3$; $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A)=4-3=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$

$A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A\cdot X=B \mid \cdot A^{-1} \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-4 \\ -3+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

② a) $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}}=\dfrac{4}{5}$

b) $f(x*y)=\dfrac{1-x*y}{1+x*y}=\left(1-\dfrac{x+y}{1+xy}\right):\left(1+\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy}\cdot\dfrac{1+xy}{1+xy+x+y}$

$=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}$; $f(x)\cdot f(y)=\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}=\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}=f(x*y)$, $\forall x,y\in G$.

c) $(x*y)*z=\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)*z=\dfrac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+\frac{x+y}{1+xy}\cdot z}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$ ①

$x*(y*z)=x*\dfrac{y+z}{1+yz}=$

$=\dfrac{x+\frac{y+z}{1+yz}}{1+x\cdot\frac{y+z}{1+yz}}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+yz+xz+xy}$ ②

din ① și ② $\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in G$.

V 070

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Se notează $A^2=A\cdot A$.

5p **a)** Pentru $a=1$ să se calculeze matricea A^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A^2\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A^2\neq I_3$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legile de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+6$ şi $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Să se verifice că $(x*2)-(3\circ x)=-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Ştiind că e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „$*$" şi e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie „$\circ$", să se calculeze $(e_1*e_2)+(e_1\circ e_2)$.

5p **c)** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$, oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

① a) $a=1$; $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

b) $\det A^2=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$ pt $a=1$

$A^2=\begin{pmatrix}a&a&a\\a&0&0\\a&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a&a\\a&0&0\\a&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a^2&a^2&a^2\\a^2&a^2&a^2\\a^2&a^2&a^2\end{pmatrix}$; $\det A^2=0, \forall a\in\mathbb{R}$

c) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{l}\det A^2=0 \Rightarrow (\det A)^2=0\\ \det I_3=1\end{array}\right\} \Rightarrow A^2\neq I_3, \forall a\in\mathbb{R}$

② a) $(x*2)-(3\circ x)=(2x-2x-2\cdot 2+6)-(3x-3(3+x)+12)=$
$=2-3x+9+3x-12=-1, \forall x\in\mathbb{R}$

b) $x*e_1=x$; $xe_1-2x-2e_1+6=x$; $xe_1-2e_1-3x+6=0\Rightarrow$
$\Rightarrow e_1(x-2)-3(x-2)=0\Rightarrow(e_1-3)(x-2)=0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e_1=3$
$x\circ e_2=x$; $xe_2-3(x+e_2)+12=x$; $xe_2-3x-3e_2+12-x=0\Rightarrow$
$\Rightarrow xe_2-3e_2-4x+12=0\Rightarrow e_2(x-3)-4(x-3)=0\Rightarrow(e_2-4)(x-3)=0,$
$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e_2-4=0\Rightarrow e_2=4$.
$(e_1*e_2)+(e_1\circ e_2)=(3*4)+(3\circ 4)=3\cdot4-2\cdot3-2\cdot4+6+3\cdot4-3(3+4)+$
$+12=12-6-8+6+12-21+12=7$
sau $(3*4)+(3\circ 4)=4+3=7$

c) $f(x*y)=a(x*y)+1=axy-2ax-2ay+6a+1$
$f(x)\circ f(y)=(ax+1)\circ(ay+1)=(ax+1)(ay+1)-3(ax+1+ay+1)+12=$
$=a^2xy-2ax-2ay+7$
$f(x*y)=f(x)\circ f(y)\Rightarrow\begin{cases}a=a^2\\6a+1=7\end{cases}\Rightarrow a=1.$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $M=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ cu x și y numere reale. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2), B(0,3), O(0,0)$ și $C_n(n+1, 2-n)$ cu $n\in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei M.

5p **b)** Să se arate că punctele A, B și C_2 sunt coliniare.

5p **c)** Să se determine numărul natural nenul n astfel încât aria triunghiului AOC_n să fie minimă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\perp y=(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Să se arate că $(x+3)\perp\left(\frac{1}{x}+3\right)=4$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **b)** Să se arate că legea „$\perp$" are elementul neutru $e=4$.

5p **c)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\perp$".

① a) $det(M)=\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=2x+3-3x-y=-x-y+3$

$C_2(3;0)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3+6-9=0 \Rightarrow A, B$ și C_2 sunt coliniare

c) $A_{\Delta AOC_n}=\frac{1}{2}|\Delta|$; $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ n+1 & 2-n & 1 \end{vmatrix}=2(n+1)-(2-n)=$
$=2n+2-2+n=3n$

$A_{\Delta AOC_n}=\frac{3n}{2}$; $n\in\mathbb{N}^*$, A - minimă pt $n=1$.

② a) $(x+3)\perp(\frac{1}{x}+3)=(x+3-3)(\frac{1}{x}+3-3)+3=x\cdot\frac{1}{x}+3=4, \forall x\in\mathbb{R}^*$

b) $x\perp e=x$; $(x-3)(e-3)+3=x$; $(x-3)(e-3)-x+3=0$
$(x-3)(e-3)-(x-3)=0$; $(x-3)(e-4)=0 \Rightarrow e=4$
$\exists e=4\in\mathbb{R}$ a.î. $x\perp e=e\perp x=x, \forall x\in\mathbb{R}$

c) $x\perp x'=4$; $(x-3)(x'-3)+3=4$; $(x-3)(x'-3)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x'-3=\frac{1}{x-3}$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
$x'=\frac{1}{x-3}+3$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $\exists x'=\frac{1}{x-3}+3\in\mathbb{R}$ a.î. $x\perp x'=x'\perp x=4$.

V 072

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z=-5 \\ x+2y+\alpha z=0 \\ 5x-4y+7z=\beta \end{cases}$ unde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, A este matricea sistemului și

$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$. Notăm cu $S(\alpha,\beta)$ suma elementelor matricei B.

5p **a)** Să se calculeze $S(0,0)$.

5p **b)** Să se determine numerele reale α și β astfel încât determinantul matricei A să fie nul și $S(\alpha,\beta)=-2$.

5p **c)** Pentru $\alpha=0$ și $\beta=0$ să se rezolve sistemul.

2. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinoamele $f=X^3+mX^2+nX+6$ și $g(X)=X^2-X-2$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2-x-2=0$.

5p **b)** Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul g.

5p **c)** Pentru $m=-4$ și $n=1$ să se calculeze produsul $P=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2008)\cdot f(2009)$.

① a) $\alpha=\beta=0$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; $S(0,0)=2-3+4-5+1+2+5-4+7=9$

b) $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & \alpha \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}=-7\alpha-7$; $\det(A)=0 \Rightarrow -7\alpha-7=0 \Rightarrow \alpha=-1$.

$S(\alpha,\beta)=9+\alpha+\beta=9-1+\beta=8+\beta$; $S(\alpha,\beta)=-2 \Rightarrow 8+\beta=-2$, $\beta=-10$

$\alpha=-1$; $\beta=-10$

c) $\alpha=\beta=0$; $\det(A)=-7\neq 0$; $\Delta=-7$; $\Delta_x=\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix}=-70$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}=35$; $\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix}=70$

$\begin{cases} x=\frac{\Delta x}{\Delta}=+10 \\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=-5 \\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=-10 \end{cases}$

② a) $x^2-x-2=0$; $\Delta=9$; $x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

b) $g=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$g\,|\,f \Rightarrow \begin{cases} f(2)=0 \\ f(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8+4m+2n+6=0 \\ -1+m-n+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+2n=-14 \mid :2 \\ m-n=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2m+n=-7 \\ m-n=-5 \end{cases}$ $3m\ /=-12$ $\begin{cases} m=-4 \\ n=1 \end{cases}$

c) $f=x^3-4x^2+x+6$

$f(2)=f(-1)=0 \Rightarrow P=f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdots f(2008)\cdot f(2009)=0$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a,b,c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Știind că $a=-1$, $b=0$ și $c=1$, să se calculeze determinantul Δ.

5p **b)** Să se arate că $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = x+y+3$, $x \circ y = ax+y-3$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și funcția $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x+6$.

5p **a)** Să se calculeze $(1*2)*(0\circ 3)$.

5p **b)** Să se determine numărul întreg a pentru care legea de compoziție "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=1$ să se arate că funcția f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z},*)$ și $(\mathbb{Z},\circ)$.

1 a) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1=0$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab)$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = (2^x+1+1)(2^{2x}+1^2+1^2-2^x-2^x-1) =$

$= (2^x+2)(2^{2x}-2\cdot 2^x+1) = (2^x+2)(2^x-1)^2$

$(2^x+2)(2^x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2^x-1=0 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0$

2 a) $(1*2)*(0\circ 3) = (1+2+3)*(a\cdot 0+3-3) = 6*0 = 6+0+3=9$

b) „$\circ$" asociativă $\Rightarrow (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$

$(ax+y+3)\circ z = x\circ(ay+z+3)$

$a(ax+y+3)+z+3 = ax+ay+z+3+3$

$a^2x+ay+z+3a+3 = ax+ay+z+6 \Rightarrow \begin{cases} a^2=a \\ 3a+3=6 \end{cases} \Rightarrow a=1$

c) $a=1$.

$\left.\begin{array}{l} f(x*y) = f(x+y+3) = x+y+3+6 = x+y+9 \\ f(x)\circ f(y) = (x+6)\circ(y+6) = x+6+y+6-3 = x+y+9 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x*y) = f(x)\circ f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{Z} \Rightarrow f$ morfism de la grupul $(\mathbb{Z},*)$ la grupul $(\mathbb{Z},\circ)$

V074

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $XA=AX$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci ecuația $Y^2=A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

5p **a)** Să se calculeze numărul elementelor inversabile în raport cu înmulțirea din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.

5p **b)** Se consideră S suma soluțiilor ecuației $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}$ și P produsul soluțiilor ecuației $x^2=x$, unde $x\in\mathbb{Z}_6$. Să se calculeze $S+P$.

5p **c)** Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, acesta să fie soluție a ecuației $x^3=\hat{0}$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$, $\det(A^2)=0$

b) $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\quad XA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}$

$AX=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}$; $XA=AX\Rightarrow\begin{cases}a=d\\c=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$

c) Presupunem că $\exists Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a.î. $Y^2=A\Rightarrow\det(Y^2)=\det(A)$

$(\det Y)^2=0\Rightarrow\det(Y)=0$

$\left.\begin{array}{l}Y^2=A\,|\cdot Y\Rightarrow Y^3=YA\\Y^2=A\,|\cdot Y\Rightarrow Y^3=AY\end{array}\right\}\Rightarrow YA=AY\overset{b}{\Rightarrow}Y=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$

$\det(Y)=a^2\Rightarrow a^2=0\Rightarrow a=0\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow Y^2=O_2\neq A$
(contradicție)

② a) $x\in\mathbb{Z}_n$; x - inversabil $\Rightarrow$ x este prim cu n

$U(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)=\{\hat{1};\hat{5}\}\Rightarrow$ 2 elemente inversabile

b) $\left.\begin{array}{l}\hat{2}x+\hat{1}=\hat{5}\Rightarrow\hat{2}x=\hat{4}\Rightarrow x\in\{\hat{2};\hat{5}\}\Rightarrow S=\hat{2}+\hat{5}=\hat{1}\\x^2=x\Rightarrow x\in\{\hat{0},\hat{1},\hat{3},\hat{4}\}\Rightarrow P=\hat{0}\cdot\hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{0}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow S+P=\hat{1}$

c) $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}\Rightarrow$ 6 cazuri posibile

$x^3=\hat{0}$ dacă $x=\hat{0}\Rightarrow$ 1 caz favorabil

$P=\frac{1}{6}$

V075

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -4\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p b) Să se demonstreze că $(A+I_2)^{-1}=A-I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p c) Să se determine numerele reale x pentru care $\det\left(x^2A\right)=x^2\det(A)$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy+3x+ay+b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$" să fie comutativă.

5p b) Să se arate că pentru $a=3$ și $b=6$ legea „$*$" admite element neutru.

5p c) Să se determine a și b astfel încât $(-3)*x=-3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2I_2$

b) $A+I_2=\begin{pmatrix}5 & -7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$; $\det(A+I_2)=\begin{vmatrix}5 & -7\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-15+14=-1\neq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\,(A+I_2)^{-1}$

$(A+I_2)(A-I_2)=A^2-I_2^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\Rightarrow$

$\Rightarrow (A+I_2)^{-1}=A-I_2$

c) $\det(x^2A)=\begin{vmatrix}4x^2 & -7x^2\\ 2x^2 & -4x^2\end{vmatrix}=-16x^4+14x^4=-2x^4$

$x^2\det(A)=x^2\begin{vmatrix}4 & -7\\ 2 & -4\end{vmatrix}=x^2(-16+14)=-2x^2$

$\Rightarrow x^4=x^2\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$

② a) $x*y=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow xy+3x+ay+b=yx+3y+ax+b\Rightarrow$
$\Rightarrow a=3$

b) $x*y=xy+3x+3y+6$
$x*e=x;\ xe+3x+3e+6=x;\ e(x+3)+2(x+3)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow (x+3)(e+2)=0\Rightarrow e=-2$
$\exists\, e=-2\in\mathbb{R}$ a.î. $x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) $(-3)*x=-3,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -3x-9+ax+b=-3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
$x(a-3)+b-6=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \begin{cases}a-3=0\\ b-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=6\end{cases}$

V076

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ x+4y-2z=16 \\ x-2y+2z=-6 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine valorile reale ale lui a astfel încât matricea A să fie inversabilă.

5p b) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p c) Să se rezolve sistemul pentru $a=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p a) Să se arate că $x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că $x\circ(-4)\circ y=-4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $1\circ(-2)\circ3\circ(-4)\circ5\circ(-6)$.

1) a) $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=8+2a+2+4-4+2a=4a+10$

A-inversabilă $\Rightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow 4a+10\neq 0 \Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{2}\}$

b) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -5a+2 & 2a-3 \\ 3 & -a+20 & -13 \\ 1 & -a-12 & 7 \end{pmatrix}$

c) $a=1$; $\Delta=\det(A)=14\neq 0$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 16 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 2 \end{vmatrix}=28$; $\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 16 & -2 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}=42$; $\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix}=-14$

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{28}{14}=2$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{42}{14}=3$; $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-14}{14}=-1$

2) a) $(x\circ y)\circ z=(xy+4x+4y+12)\circ z=xyz+4xz+4yz+12z+4xy+16x+$
$+16y+48+4z+12=xyz+4(xz+yz+xy)+16(x+y+z)+60$ (1)

$x\circ(y\circ z)=x\circ(yz+4y+4z+12)=xyz+4xy+4xz+12x+4x+4yz+16y+$
$+16z+48+12=xyz+4(xy+xz+yz)+16(x+y+z)+60$ (2)

din (1) și (2) $\Rightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

b) $x\circ(-4)\circ y=[x\circ(-4)]\circ y=(-4x+4x-16+12)\circ y=(-4)\circ y=$
$=-4y-16+4y+12=-4 \Rightarrow x\circ(-4)\circ y=-4$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

c) $1\circ(-2)\circ3\circ(-4)\circ5\circ(-6)=1\circ(-2)\circ[3\circ(-4)\circ5]\circ(-6)=$

$=1\circ[(-2)\circ(-4)\circ(-6)]=1\circ(-4)=-4$. (din a) și b))

V077

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1), B(1,2)$ și $C_n(n,-n)$, cu $n\in\mathbb{Z}$.

5p a) Să se scrie ecuația dreptei C_4C_2.

5p b) Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}^*$ punctele O, C_n, C_{n+1}, sunt coliniare.

5p c) Să se calculeze aria triunghiului ABC_3.

2. Se consideră matricele $A_x=\begin{pmatrix}2009^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R}$ și mulțimea $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se verifice că $I_3\in G$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p b) Să se demonstreze că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p c) Să se arate că $G=\{A_x \mid x\in\mathbb{R}\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

① a) $C_4(4;-4)$; $C_2(2;-2)$ $C_4C_2: \begin{vmatrix} x & y & 1\\ 4 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$; $C_4C_2: x+y=0$

b) $O(0;0)$; $C_n(n;-n)$; $C_{n+1}(n+1;-n-1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ n & -n & 1\\ n+1 & -n-1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n & -n\\ n+1 & -n-1\end{vmatrix}=-n^2-n+n^2+n=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow O; C_n; C_{n+1}$ – coliniare

c) $C_3(3;-3)$; $\mathcal{A}_{\Delta ABC_3}=\frac{1}{2}|\Delta|$; $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{vmatrix}=3$; $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$

② a) $I_3=\begin{pmatrix}2009^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A_0\in G$

b) $A_x\cdot A_y=\begin{pmatrix}2009^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2009^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2009^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x+y & 1\end{pmatrix}=$

$=A_{x+y}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

c) $G_1)$ $A_x\cdot(A_y\cdot A_z)=(A_x\cdot A_y)\cdot A_z=A_{x+y+z}$, $\forall A_x; A_y; A_z\in G$.

$G_2)$ $A_x\cdot A_e=A_e\cdot A_x=A_x \Rightarrow A_{x+e}=A_{e+x}=A_x \Rightarrow e=0$

$\exists A_0\in G$ a.î. $A_x\cdot A_e=A_e\cdot A_x=A_x$, $\forall A_x\in G$.

$G_3)$ $A_x\cdot A_{x'}=A_{x'}\cdot A_x=A_0 \Rightarrow x+x'=x'+x=0 \Rightarrow x'=-x$

$\forall A_x\in G$; $\exists A_{-x}\in G$ a.î. $A_x\cdot A_{-x}=A_{-x}\cdot A_x=A_0$

$G_4)$ $A_x\cdot A_y=A_{x+y}=A_{y+x}=A_y\cdot A_x$, $\forall A_x; A_y\in G$.

din $G_1-G_4 \Rightarrow (G,\cdot)$ grup abelian

V078

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulţimea matricelor $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Pentru $A,B\in G$, să se demonstreze că $A+B\in G$.

5p **b)** Să se arate că matricea $C\in G$, obţinută pentru $a=5$ şi $b=3$, verifică relaţia $C^2=10C-16I_2$, unde $C^2=C\cdot C$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Pentru $a,b\in\mathbb{N}$ să se determine o matrice $D\in G$ care are proprietatea că $\det(D)=2008$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f(X)=(X+1)^{2009}-(X-1)^{2009}$ care are forma algebrică $f=a_{2009}X^{2009}+a_{2008}X^{2008}+...+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se determine a_0.

5p **b)** Să se arate că $f(1)+f(-1)$ este număr întreg par.

5p **c)** Să se determine numărul rădăcinilor reale ale polinomului f.

① a) $A,B\in G$; $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} c & d\\ d & c\end{pmatrix}$; $A+B=\begin{pmatrix} a+c & b+d\\ b+d & a+c\end{pmatrix}\in G$

b) $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ $C^2=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 30\\ 30 & 34\end{pmatrix}$

$10C-16I_2=\begin{pmatrix}50 & 30\\ 30 & 50\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 30\\ 30 & 34\end{pmatrix}=C^2$

c) $D\in G$, $D=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$; $a,b\in\mathbb{N}$; $\det(D)=a^2-b^2$

$a^2-b^2=2008 \Rightarrow (a-b)(a+b)=2008$

luăm $\begin{cases} a-b=2\\ a+b=1004\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=503\\ b=501\end{cases}$ $D=\begin{pmatrix}503 & 501\\ 501 & 503\end{pmatrix}$

② a) $a_0=f(0)=1^{2009}-(-1)^{2009}=1+1=2$

b) $f(1)=(1+1)^{2009}-(1-1)^{2009}=2^{2009}$; $f(-1)=(-1+1)^{2009}-(-1-1)^{2009}=2^{2009}$

$f(1)+f(-1)=2^{2009}+2^{2009}=2\cdot 2^{2009}$ – nr întreg par

c) $f(x)=0 \Rightarrow (x+1)^{2009}-(x-1)^{2009}=0 \Rightarrow (x+1)^{2009}=(x-1)^{2009} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+1=x-1 \Rightarrow 1=-1$ fals $\Rightarrow f$ nu are rădăcini reale

V079

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $A\cdot B$.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A\cdot X=B$, unde $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-4A+5I_2=O_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+y-14$.

5p **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

5p **b)** Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

5p **c)** Să se demonstreze că $(\mathbb{R},\circ)$ este grup comutativ.

① a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 9\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

b) $\det(A)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^{*}$

$A^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $A^*=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$A\cdot X=B\,|\,A^{-1}$; $A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & 7\\ 11 & 6\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{7}{5}\\ \frac{11}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$

c) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; $A^2-4A+5I_2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 4\\ -4 & 8\end{pmatrix}+$

$+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$

② a) $x+x-14=2$; $2x=16 \Rightarrow x=8$

b) $(x\circ y)\circ z=(x+y-14)\circ z=x+y+z-28$ ①

$x\circ(y\circ z)=x\circ(y+z-14)=x+y+z-28$ ②

din ① și ② $\Rightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

c) $G_1)$ $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$ (din b)

$G_2)$ $x\circ y=x+y-14=y+x-14=y\circ x, \forall x,y\in\mathbb{R}$

$G_3)$ $x\circ e=e\circ x=x$; $x+e-14=x \Rightarrow e=14$

$\exists e=14\in\mathbb{R}$ a.î. $x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

$G_4)$ $x\circ x'=x'\circ x=e$; $x+x'-14=14 \Rightarrow x'=28-x$

$\forall x\in\mathbb{R}, \exists x'=28-x\in\mathbb{R}$ a.î. $x\circ x'=x'\circ x=e$

Din $G_1-G_4 \Rightarrow (\mathbb{R},\circ)$ grup comutativ

V080

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

5p **c)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(a)=-4$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-10(x+y)+110$.

5p **a)** Să se verifice că $x\circ y=(x-10)(y-10)+10$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $C_{10}^1\circ C_{20}^1$.

5p **c)** Să se rezolve ecuaţia $x\circ(x-1)=10$, unde $x\in\mathbb{R}$.

① a) $D(-1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-1-1+1-1-1=-4$

b) $D(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+a+a-a^3-1-1=-a^3+3a-2=$

$=-a^3+a+2a-2=-a(a^2-1)+2(a-1)=$

$=-a(a-1)(a+1)+2(a-1)=-(a-1)(a^2+a-2)=-(a-1)^2(a+2),$ $\forall a\in\mathbb{R}$

c) $D(a)=-4$; $-a^3+3a-2=-4$; $-a^3+3a+2=0$

$-a^3+a+2a+2=0$; $-a(a^2-1)+2(a+1)=0$

$-a(a-1)(a+1)+2(a+1)=0$; $-(a+1)(a^2-a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=-1 \\ a_2=-1 \\ a_3=2 \end{cases}$

$\Delta=1+8=9$; $a_{2,3}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases} a_2=-1 \\ a_3=2 \end{cases}$

② a) $(x-10)(y-10)+10=xy-10x-10y+100+10=$

$=xy-10(x+y)+110=x\circ y,$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $C_{10}^1=10$; $C_{20}^1=20$; $C_{10}^1\circ C_{20}^1=10\circ20=(10-10)(20-10)+10=$

$=10$

c) $(x-10)(x-1-10)+10=10$; $(x-10)(x-11)=0$

$x-10=0 \Rightarrow x_1=10$

$x-11=0 \Rightarrow x_2=11$

V081

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_k & x_k^2\\ -2 & x_k^2 & x_k\end{pmatrix}$, cu $k\in\{0,1,2\}$. $x_0=1$ și x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației

$x^2+x-2=0,\ x_1<x_2$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei $A(0)$.
5p **b)** Să se determine matricea $A(1)+A(2)$.
5p **c)** Să se calculeze suma elementelor matricei $A(k)$, pentru fiecare $k\in\{0,1,2\}$.

2. Pe mulțimea $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră operația $x\circ y=x^{2\ln y}$.

5p **a)** Să se calculeze $3\circ e$, unde e este baza logaritmului natural.
5p **b)** Să se demonstreze că $x\circ y\in G$, pentru orice $x,y\in G$.
5p **c)** Să se arate că operația "$\circ$" este asociativă pe mulțimea G.

① a) $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_0 & x_0^2\\ -2 & x_0^2 & x_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A(0)=0$

b) $x^2+x-2=0;\ \Delta=9;\ x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2}=\Big\langle\begin{matrix}x_1=-2\\ x_2=1\end{matrix}$

$A(1)+A(2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_1 & x_1^2\\ -2 & x_1^2 & x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & x_2 & x_2^2\\ -2 & x_2^2 & x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & 4\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -4 & -1 & 5\\ -4 & 5 & -1\end{pmatrix}$

c) $S=1+1+1-2+x_k+x_k^2-2+x_k^2+x_k=2x_k^2+2x_k-1=$
$=2x_k^2+2x_k-4+3=2\underbrace{(x_k^2+x_k-2)}_{0}+3=2\cdot0+3=3,\ \forall k\in\{0,1,2\}$

② a) $3\circ e=3^{2\ln e}=3^{2\cdot1}=3^2=9$

b) $x,y\in G\Rightarrow\begin{cases}x>0;\ x\neq1 & \Rightarrow x^2>0;\ x^2\neq1\\ y>0;\ y\neq1\end{cases}\Bigg\}\Rightarrow x^{2\ln y}>0,\ x^{2\ln y}\neq1$

deci $x\circ y\in G,\ \forall x,y\in G$.

c) $(x\circ y)\circ z=\left(x^{2\ln y}\right)\circ z=\left(x^{2\ln y}\right)^{2\ln z}=x^{4\ln y\ln z}$
$x\circ(y\circ z)=x\circ\left(y^{2\ln z}\right)=x^{2\ln\left(y^{2\ln z}\right)}=x^{2\ln z\cdot2\ln y}$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\ \forall x,y,z\in G.$

V 082

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul $D(a;b;x)=\begin{vmatrix}1 & x & ab\\ 1 & a & bx\\ 1 & b & ax\end{vmatrix}$, unde a,b și x sunt numere reale.

5p **a)** Să se calculeze $D(1;1;0)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $D(a;b;x)$ nu depinde de numărul real x. ?? $D(a;a;x)$

5p **c)** Să se rezolve ecuația $D(a;b;x)=0$, unde a și b sunt numere reale pozitive.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3-3X+a$ și $g(x)=X^2-3X+2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=2$ să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=g(x)$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului f, știind că are o rădăcină dublă pozitivă.

5p **c)** Pentru $a=2$ să se rezolve ecuația $e^{f(x)}=g\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)$.

① a) $D(1;1;0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1-1=0$

b) $D(a;a;x)=\begin{vmatrix}1 & x & a^2\\ 1 & a & ax\\ 1 & a & ax\end{vmatrix}=0 \Rightarrow D(a,a,x)$ nu depinde de x

c) $D(a,b,x)=a^2x+bx^2+ab^2-a^2b-b^2x-ax^2=$

$=x^2(b-a)-x(b^2-a^2)+ab(b-a)=(b-a)(x^2-bx-ax+ab)$

$=(b-a)[x(x-b)-a(x-b)]=(b-a)(x-b)(x-a)$

$\left.\begin{matrix}(b-a)(x-b)(x-a)=0\\ a,b>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}x-a=0\Rightarrow x_1=a\\ x-b=0\Rightarrow x_2=b\end{cases}$

② a) $a=2$; $x^3-3x+2=x^2-3x+2 \Rightarrow x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=x_2=0;\ x_3=1$

b) $\begin{cases}x_1=x_2=\alpha>0\\ x_1+x_2+x_3=0\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3\\ x_1x_2x_3=-a\end{cases}$

$2\alpha+x_3=0 \Rightarrow x_3=-2\alpha$
$\alpha^2-2\alpha^2-2\alpha^2=-3$
$-3\alpha^2=-3 \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=1.$
$x_1=x_2=1;\ x_3=-2;\ a=2$

c) $g\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)=\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3-\sqrt5}{2}+2=\frac{9-6\sqrt5+5}{4}-\frac{9-3\sqrt5}{2}+2=$
$=\frac{9-6\sqrt5+5-18+6\sqrt5+8}{4}=\frac{4}{4}=1.$

$e^{f(x)}=1 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^3-3x+2=0 \Rightarrow \overbrace{x^3-2x^2+x}+\overbrace{2x^2-4x+2}=0$
$x(x-1)^2+2(x-1)^2=0;\ (x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=x_2=1\\ x_3=-2\end{cases}$

V083

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 2x^2+2x\\ 0 & 1 & 4x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0)+f(1)$.

5p **b)** Să se arate că $f(1)\cdot f(-1)=I_3$ unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$, pentru $x\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}\hat{1} & \hat{2} & \hat{3}\\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1}\\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2}\end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

5p **c)** Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases}\hat{2}x+y=\hat{4}\\ x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$, unde $x, y\in\mathbb{Z}_6$.

① a) $f(0)+f(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}$

b) $f(1)\cdot f(-1)=\begin{pmatrix}1&1&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

c) $f(x+y)=\begin{pmatrix}1&x+y&2(x+y)^2+2(x+y)\\0&1&4(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}$

$f(x)\cdot f(y)=\begin{pmatrix}1&x&2x^2+2x\\0&1&4x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&2y^2+2y\\0&1&4y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+y&2y^2+2y+4xy+2x^2+2x\\0&1&4x+4y\\0&0&1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&x+y&2(x+y)^2+2(x+y)\\0&1&4(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=f(x+y),\ \forall x, y\in\mathbb{R}$

② a) $\hat{2}x=\hat{1}+(-\hat{5})$; $\hat{2}x=\hat{1}+\hat{1}$; $\hat{2}x=\hat{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\hat{1}\\x_2=\hat{4}\end{cases}$

b) $d=(\underbrace{\hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{2}+\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}}_{\hat{0}})-(\underbrace{\hat{3}\cdot\hat{3}\cdot\hat{3}}_{\hat{3}}+\underbrace{\hat{1}\cdot\hat{1}\cdot\hat{1}}_{\hat{1}}+\underbrace{\hat{2}\cdot\hat{2}\cdot\hat{2}}_{\hat{2}})=\hat{0}$

c) $-\hat{2}=\hat{4}$ $\begin{cases}y=\hat{4}x+\hat{4}\\x+\hat{2}(\hat{4}x+\hat{4})=\hat{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4x+\hat{4}\\x+\hat{2}x+\hat{2}=\hat{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4x+\hat{4}\\3x=\hat{3}\Rightarrow x\in\{\hat{1},\hat{3},\hat{5}\}\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=\hat{1}\\y_1=\hat{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\hat{3}\\y_2=\hat{4}\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=\hat{5}\\y_3=\hat{0}\end{cases}$

V084

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $A=B+I_3$.

5p b) Să se demonstreze că matricea A este inversabilă și să se determine A^{-1}.

5p c) Să se determine numărul real a astfel încât $\det(X(a))=(2a-1)^3$, unde $X(a)=I_3+aA$.

2. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=xy-x-y+2$.

5p a) Să se demonstreze că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că legea "$*$" este asociativă.

5p c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\ldots*\frac{\sqrt{2009}}{2}$.

① a) $B+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A$

b) $\det(A)=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*$; $A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1=-1$; $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 1=1$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 0=0$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot 1=-1$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot 0=0$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 0=0$; $A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot 1=1$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) $X(a)=I_3+aA=\begin{pmatrix}a+1&a&0\\0&a+1&a\\0&0&a+1\end{pmatrix}$; $\det(X(a))=(a+1)^3$; $(a+1)^3=(2a-1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+1=2a-1 \Rightarrow a-2a=-1-1$; $-a=-2 \Rightarrow a=2$.

② a) $(x-1)(y-1)+1=xy-x-y+1+1=xy-x-y+2=x*y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $(x*y)*z=(xy-x-y+2)*z=xyz-xz-yz+2z-xy+x+y-2-z+2=$

$=xyz-xz-yz-xy+x+y+z$ ①

$x*(y*z)=x*(yz-y-z+2)=xyz-xy-xz+2x-x-yz+y+z-2+2=$

$=xyz-xy-xz-yz+x+y+z$ ②

din ① și ② $\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

c) $x*1=(x-1)(1-1)+1=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\frac{\sqrt{1}}{2}*\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{\sqrt{3}}{2}*\frac{\sqrt{4}}{2}*\cdots*\frac{\sqrt{2009}}{2}=1$ pt că $\frac{\sqrt{4}}{2}=1$ și $x*1=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

V085

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ x+ay+(a-3)z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $\det(A)=a^2-6a+5$.

5p b) Să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

5p c) Pentru $a=0$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-6x-6y+42$.

5p a) Să se arate că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x*x=x$.

5p c) Să se calculeze $1*2*3*...*2009$.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2a-1 & 3 \\ 1 & a & a-3 \end{vmatrix}=(2a-1)(a-3)+3a+2a-2(2a-1)-3a-a(a-3)=$
$=2a^2-6a-a+3+3a+2a-4a+2-3a-a^2+3a=$
$=a^2-6a+5$

b) $\det(A)=0 \Rightarrow a^2-6a+5=0;\ \Delta=36-20=16;\ a_{1,2}=\dfrac{6\pm4}{2}=\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2z=1 \\ x-y+3z=1 \\ x-3z=1 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x+2z=1 \\ x-3z=1\,|(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=1 \\ -x+3z=-1 \end{cases}$

$/\ 5z=0 \Rightarrow z=0;\ x=1.$

$1-y+3\cdot0=1 \Rightarrow y=0;\quad x=1;\ y=z=0$

② a) $(x-6)(y-6)+6=xy-6x-6y+36+6=xy-6x-6y+42=x*y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $(x*x)*(x*x)=[(x-6)(x-6)+6]*[(x-6)(x-6)+6]=[(x-6)^2+6]*[(x-6)^2+6]=$
$=[(x-6)^2+6-6][(x-6)^2+6-6]+6=(x-6)^4+6.$

$(x-6)^4+6=x \Rightarrow (x-6)^4-(x-6)=0 \Rightarrow (x-6)((x-6)^3-1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \Rightarrow x_1=6 \\ (x-6)^3-1=0 \Rightarrow (x-6)^3=1 \Rightarrow x-6=1 \Rightarrow x_2=7 \end{cases}$

c) $x*6=(x-6)(6-6)+6=6,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

$1*2*3*4*5*6*...*2009=6$ fiindcă $x*6=6,\ \forall x\in\mathbb{R}$

V086

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,X^2=-I_2\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p **a)** Să se verifice că $A\in G$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\left(\frac{1}{2}(X+I_2)\right)^2=\frac{1}{2}X$, oricare ar fi $X\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că orice matrice pătratică de ordinul al doilea cu elemente numere reale pentru care avem $A\cdot X=X\cdot A$ este de forma $X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $c=501$ să se demonstreze că $f(1)+f(-1)=1004$.

5p **b)** Pentru $a=-2$, $b=2$ și $c=-1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există valori reale ale coeficienților a,b,c astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $g=X^3-X$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2 \Rightarrow A\in G.$

b) $\left[\frac{1}{2}(X+I_2)\right]^2=\frac{1}{4}\left(X^2+2XI_2+I_2^2\right)=\frac{1}{4}\left(-I_2+2X+I_2\right)=\frac{1}{2}X,\ \forall X\in G.$

c) $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ $\quad A\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z & t\\ -x & -y\end{pmatrix}$

$XA=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y & x\\ -t & z\end{pmatrix}$

$AX=XA \Rightarrow \begin{cases}z=-y\\ t=x\end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix};\ x,y\in R$

② a) $c=501$; $f(1)=1+a+b+501=a+b+502$; $f(-1)=1-a-b+501=$
$=-a-b+502$; $f(1)+f(-1)=a+b+502-a-b+502=1004$

b) $f=x^4-2x^3+2x-1$; $(x^4-1)-2x(x^2-1)=0$; $(x^2-1)(x^2+1-2x)=0$;
$(x^2-1)(x-1)^2=0$; $(x-1)^3(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=x_2=x_3=1\\ x_4=-1\end{cases}$

c) $g=x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$

dacă $g/f \Rightarrow \begin{cases}f(0)=0\\ f(1)=0\\ f(-1)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=0\\ 1+a+b+c=0\\ 1-a-b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\ a+b=-1\\ -a-b=-1\,|(-1)\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\ a+b=-1\\ a+b=1\end{cases}$ imposibil

deci $\nexists\, a,b,c\in R$ a. î. g/f

V087

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2=X\right\}$, unde $X^2=X\cdot X$.

5p a) Să se verifice că $A\in G$.

5p b) Să se calculeze $\det\left(A^3-2A^2+A\right)$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

5p c) Să se demonstreze că $\left(2X-I_2\right)^2=I_2$, oricare ar fi $X\in G$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\sqrt{2009}(x+y)+2009+\sqrt{2009}$.

5p a) Să se arate că $x*y=\left(x-\sqrt{2009}\right)\left(y-\sqrt{2009}\right)+\sqrt{2009}$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție „$*$".

5p c) Știind că legea de compoziție „$*$" este asociativă, să se calculeze $\left(-\sqrt{2009}\right)*\left(-\sqrt{2008}\right)*\ldots*0*\ldots*\left(\sqrt{2008}\right)*\left(\sqrt{2009}\right)$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=A \Rightarrow A\in G.$

b) $A^3=A\cdot A^2=A\cdot A=A^2=A$; $A^3-2A^2+A=A-2A+A=O_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A^3-2A^2+A)=\det(O_2)=0$

c) $(2X-I_2)^2=4X^2-4XI_2+I_2^2=4X-4X+I_2=I_2,\ \forall X\in G.$

② a) $(x-\sqrt{2009})(y-\sqrt{2009})+\sqrt{2009}=xy-\sqrt{2009}(x+y)+2009+\sqrt{2009}=$

$=x*y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x*e=e*x=x$

$(x-\sqrt{2009})(e-\sqrt{2009})+\sqrt{2009}=x$

$(x-\sqrt{2009})(e-\sqrt{2009})-(x-\sqrt{2009})=0$

$(x-\sqrt{2009})(e-\sqrt{2009}-1)=0 \Rightarrow e=\sqrt{2009}+1$

$\exists\, e=\sqrt{2009}+1\in\mathbb{R}$ a.î. $x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

c) $x*\sqrt{2009}=(x-\sqrt{2009})(\sqrt{2009}-\sqrt{2009})+\sqrt{2009}=\sqrt{2009},\ \forall x\in\mathbb{R}$

$(-\sqrt{2009})*(-\sqrt{2008})*(-\sqrt{2007})*\ldots*0*\ldots*\sqrt{2008}*\sqrt{2009}=$

$=\sqrt{2009}$ pt că $x*\sqrt{2009}=\sqrt{2009},\ \forall x\in\mathbb{R}$

V088

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$, unde a este număr real și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Pentru $a=0$ să se calculeze A^2, unde $A^2 = A \cdot A$.

5p **b)** Să se determine valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor reale.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se consideră legile de compoziție $x * y = px + y + 2$, cu $p \in \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y - 2$ și funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x + q$, cu $q \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se determine numărul real p astfel încât legea de compoziție "$*$" să fie comutativă.

5p **b)** Pentru $p=1$ să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x * x) \circ (x * x) = x^2 + 2$.

5p **c)** Pentru $p=1$ să se determine numărul întreg q astfel încât funcția f să fie morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$.

① a) $a=0$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + a - 1 - 1 + 2 - 2a = -a + 4$

A - inversabilă $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow -a+4 \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

c) $\Delta = -a + 4 \neq 0 \Rightarrow$ sistem Cramer, omogen $\Rightarrow x = y = z = 0$ soluție unică

② a) $x * y = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow px + y + 2 = py + x + 2 \Rightarrow p = 1$.

b) $p = 1$; $x * y = x + y + 2$, $x, y \in \mathbb{Z}$

$(x * x) \circ (x * x) = (x + x + 2) \circ (x + x + 2) = (2x+2) + (2x+2) - 2 =$
$= 4x + 2$; $x^2 + 2 = 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

c) f - morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x * y) = f(x) \circ f(y)$; $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$f(x+y+2) = f(x) + f(y) - 2$
$3(x+y+2) + q = 3x + q + 3y + q - 2$
$3x + 3y + 6 + q = 3x + 3y + 2q - 2 \Rightarrow 6 + q = 2q - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -q = -8 \Rightarrow q = 8$

V089.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&7&5\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Pentru $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează $X^3=X\cdot X\cdot X$.

5p **a)** Să se determine A^{-1}.

5p **b)** Să se rezolve ecuația matricială $A^3\cdot X=I_3$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se calculeze $(B-A)^3$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție $x*y=3xy+7x+7y+14$.

5p **a)** Să se determine elementul neutru al legii "$*$".

5p **b)** Să se rezolve mulțimea numerelor întregi inecuația $x*x\le -1$.

5p **c)** Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

① a) $\det A=15\ne 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$; $A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 15=15$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 0=0$; $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot 0=0$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 0=0$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 5=5$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot 0=0$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot 0=0$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot 0=0$ $A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot 3=3$

$A^*=\begin{pmatrix}15&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac13&0\\0&0&\frac15\end{pmatrix}$

b) $A^3X=I_3 \mid\cdot(A^3)^{-1} \Rightarrow X=(A^3)^{-1}$; $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&9&0\\0&0&25\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&27&0\\0&0&125\end{pmatrix}$

$\det A^3=27\cdot125$; $(A^3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{27}&0\\0&0&\frac{1}{125}\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{27}&0\\0&0&\frac{1}{125}\end{pmatrix}$

c) $B-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&7&0\end{pmatrix}$; $(B-A)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\14&0&0\end{pmatrix}$; $(B-A)^3=O_3$

② a) $x*e=e*x=x$; $3xe+7x+7e+14=x$; $e(3x+7)+2(3x+7)=0$

$(3x+7)(e+2)=0 \Rightarrow e=-2$; $\exists e=-2\in\mathbb{Z}$ a.î. $x*e=e*x=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

b) $3x\cdot x+7x+7x+14\le -1$; $3x^2+14x+15\le 0$; $\Delta=16$; $x_1=-\frac53$; $x_2=-3$

x	$-\infty$	-3	$-\frac53$	$+\infty$
$3x^2+14x+15$	$+$	$0\ -$	0	$+$

$x\in[-3;-\frac53]\cap\mathbb{Z}$

$x\in\{-3;-2\}$

c) $(x*y)*z=(3xy+7x+7y+14)*z=9xyz+21(xy+xz+yz)+49(x+y+z)+112$

$x*(y*z)=x*(3yz+7y+7z+14)=9xyz+21(xy+xz+yz)+49(x+y+z)+112$

$\Rightarrow (x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$

V090

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+2y+4z=0 \\ a^2x+4y+16z=0 \end{cases}$, cu $a\in\mathbb{R}$ și matricea sistemului $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

5p a) Pentru $a=1$ să se calculeze determinantul matricei A.

5p b) Să se determine mulțimea valorilor reale ale numărului a pentru care $\det(A)\neq 0$.

5p c) Să se rezolve sistemul pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se determine numărul real c știind că $f(1)+f(-1)=2009$.

5p b) Să se determine numerele reale a,b,c știind că $f(0)=f(1)=-2$ și că una dintre rădăcinile polinomului este $x=2$.

5p c) Pentru $a=-2$, $b=1$ și $c=-2$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=32+4+4-2-16-16=6$

b) $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 4 \\ a^2 & 4 & 16 \end{vmatrix}=32+4a^2+4a-2a^2-16-16a=$
$=2a^2-12a+16=2(a^2-6a+8)$

$\Delta=36-32=4;\ a_{1,2}=\dfrac{6\pm2}{2}\Rightarrow \begin{cases} a_1=4 \\ a_2=2 \end{cases}$; $\det(A)\neq0 \ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$

c) $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}\Rightarrow \det(A)\neq0 \Rightarrow$ soluție unică $x=y=z=0$

② a) $f(1)=1+a+b+c;\ f(-1)=1-a-b+c$

$f(1)+f(-1)=2009 \Rightarrow 1+a+b+c+1-a-b+c=2009;$

$2+2c=2009\Rightarrow c=\dfrac{2007}{2}$

b) $\begin{cases} f(2)=0 \\ f(0)=f(1)=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2 \\ 1+a+b+c=-2 \\ 16+8a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ a+b=-1 \\ 8a+2b=-14 \,|:(-2) \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=-1 \\ -4a-b=7 \end{cases}$
$-3a\ /=6$

$a=-2;\ b=-1+2;\ b=1$
$a=-2;\ b=1;\ c=-2$

c) $f=x^4-2x^3+x-2=x^3(x-2)+(x-2)=(x^3+1)(x-2)=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)$

$x+1=0\Rightarrow x_1=-1$

$x-2=0\Rightarrow x_2=2$

$x^2-x+1=0;\ \Delta=-3<0\Rightarrow x_{3,4}\notin\mathbb{R}$.

V091

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Pentru $a\in\mathbb{R}$ fixat, definim matricea $B=aA+I_3$.

5p a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$.

5p b) Să se demonstreze că $2B-B^2=I_3$.

5p c) Să se determine B^{-1}.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție prin $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p a) Să se verifice că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se determine numărul real x pentru care $(x^2-5)\circ 6=-1$.

5p c) Să se determine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$

b) $B=aA+I_3$; $B^2=(aA+I_3)^2=a^2A^2+2aAI_3+I_3^2=$

$=a^2O_3+2aA+I_3=2aA+I_3$

$2B-B^2=2(aA+I_3)-(2aA+I_3)=2aA+2I_3-2aA-I_3=I_3$

c) $B=aA+I_3=\begin{pmatrix}a+1 & 2a & -3a\\ a & 2a+1 & -3a\\ a & 2a & -3a+1\end{pmatrix}$; $\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 2a & -3a\\ 1 & 2a+1 & -3a\\ 1 & 2a & -3a+1\end{vmatrix}=$

$C_1+C_2+C_3$

$=(2a+1)(-3a+1)-6a^2-6a^2+3a(2a+1)+6a^2-2a(-3a+1)=1\neq 0\Rightarrow\exists B^{-1}$

$B^t=\begin{pmatrix}a+1 & a & a\\ 2a & 2a+1 & 2a\\ -3a & -3a & -3a+1\end{pmatrix}$ $B_{11}=-a+1$; $B_{12}=-2a$; $B_{13}=3a$

$B_{21}=-a$; $B_{22}=-2a+1$; $B_{23}=3a$

$B_{31}=-a$; $B_{32}=-2a$; $B_{33}=3a+1$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}-a+1 & -2a & 3a\\ -a & -2a+1 & 3a\\ -a & -2a & 1+3a\end{pmatrix}$

② a) $3(x+1)(y+1)-1=3xy+3x+3y+3-1=3xy+3x+3y+2=x\circ y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $3(x^2-5)\cdot 6+3(x^2-5)+3\cdot 6+2=-1$; $18x^2-90+3x^2-15+18+2=-1$; $21x^2=84\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$.

c) $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}=3\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3}+1\right)-1=3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}-1=6-1=5\in\mathbb{N}$

$a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$

V092

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și mulțimea

$G=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\mid AX=XA\}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^2X=XA^2$, oricare ar fi $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **c)** Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci matricea $aI_3+bA\in G$.

2. Se consideră polinomul $f=(1+X+X^2)^{1004}+X^{2009}$, cu forma algebrică

$f=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_{2009}X^{2009}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2009}$ este un număr întreg par.

5p **c)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-1.

① a) $\det(A)=\begin{vmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{vmatrix}=-a^3$

b) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&a\\0&a&0\\a&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0&0\\0&a^2&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}=a^2I_3$

$\left.\begin{array}{l}A^2X=a^2I_3\cdot X=a^2X\\ XA^2=X\,a^2I_3=a^2XI_3=a^2X\end{array}\right\}\Rightarrow A^2X=XA^2,\ \forall X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

c) $\left.\begin{array}{l}A(aI_3+bA)=AaI_3+AbA=aA+ba^2I_3\\(aI_3+bA)A=aI_3A+bAA=aA+ba^2I_3\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow A(aI_3+bA)=(aI_3+bA)A,\ \forall a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow aI_3+bA\in G.$

② a) $f(-1)=(1-1+1)^{1004}+(-1)^{2009}=1-1=0$

b) $\left.\begin{array}{l}f(1)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2009}\\ f(1)=(1+1+1)^{1004}+1^{2009}=3^{1004}+1\text{ - nr par}\end{array}\right\}\Rightarrow a_0+a_1+a_2+\ldots$

$\ldots+a_{2009}$ - este număr întreg par

c) $X^2-1=(X-1)(X+1)$; grad $(X^2-1)=2\Rightarrow$ grad $r=1\Rightarrow r=aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

$f=(X-1)(X+1)\cdot q+aX+b$

$f(1)=(1-1)(1+1)q(1)+a+b=a+b$

$f(-1)=(-1-1)(-1+1)q(-1)-a+b=-a+b$

$\begin{cases}f(1)=3^{1004}+1\\f(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=3^{1004}+1\\a-b=0\end{cases}$

$2a\,/=3^{1004}+1$

$\begin{cases}a=\dfrac{3^{1004}+1}{2}\\ b=a=\dfrac{3^{1004}+1}{2}\end{cases}$

$r=\dfrac{3^{1004}+1}{2}X+\dfrac{3^{1004}+1}{2}$

V093

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A^2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^3=2^3\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$, unde $A^3=A^2\cdot A$.

5p **c)** Să se demonstreze că matricea A verifică egalitatea $A^2-8A+12I_2=O_2$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{Z}_6[X]$, $f=X^3+(\hat{2}a+\hat{1})X+a+\hat{4}$

5p **a)** Să se demonstreze că $b^3=b$, oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}_6$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_6$, știind că $f(\hat{2})=\hat{0}$.

5p **c)** Pentru $a=\hat{2}$ să se rezolve ecuația $f(x)=\hat{0}$, $x\in\mathbb{Z}_6$.

① a) $A^2=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 16\\ 16 & 20\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

$\det(A^2)=\begin{vmatrix}20 & 16\\ 16 & 20\end{vmatrix}=400-256=144$

b) $A^3=A^2\cdot A=2^2\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}28 & 26\\ 26 & 28\end{pmatrix}=2^3\begin{pmatrix}14 & 13\\ 13 & 14\end{pmatrix}$

c) $A^2-8A+12I_2=2^2\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$

② a) $\hat{0}^3=\hat{0}$; $\hat{1}^3=\hat{1}$; $\hat{2}^3=\hat{2}$; $\hat{3}^3=\hat{3}$; $\hat{4}^3=\hat{4}$; $\hat{5}^3=\hat{5}$ $\Rightarrow b^3=b,\ \forall b\in\mathbb{Z}_6$

b) $f(\hat{2})=\hat{0}\Rightarrow\hat{2}+(\hat{2}a+\hat{1})\cdot\hat{2}+a+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow\hat{5}a+\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow$
$\Rightarrow\hat{5}a=\hat{4}\quad(-\hat{2}=\hat{4})\quad\Rightarrow a=\hat{2}$ pt că $\hat{5}\cdot\hat{2}=\hat{4}$ în $\mathbb{Z}_6$

c) $a=\hat{2}$; $f=X^3+(\hat{2}\cdot\hat{2}+\hat{1})X+\hat{2}+\hat{4}=X^3+\hat{5}X$

$f(\hat{0})=\hat{0}\Rightarrow x_1=\hat{0}$; $f(\hat{1})=\hat{0}\Rightarrow x_2=\hat{1}$; $f(\hat{3})=\hat{3}+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow$
$\Rightarrow x_3=\hat{3}$; $f(\hat{2})=\hat{2}+\hat{5}\cdot\hat{2}=\hat{2}+\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow x_4=\hat{2}$;
$f(\hat{4})=\hat{4}+\hat{5}\cdot\hat{4}=\hat{4}+\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow x_5=\hat{4}$; $f(\hat{5})=\hat{5}+\hat{5}\cdot\hat{5}=$
$=\hat{5}+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow x_6=\hat{5}$

$\begin{cases}x_1=\hat{0}\\ x_2=\hat{1}\\ x_3=\hat{2}\\ x_4=\hat{3}\\ x_5=\hat{4}\\ x_6=\hat{5}\end{cases}$ $\quad\forall x\in\mathbb{Z}_6\Rightarrow f(x)=\hat{0}$

V094

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, x real și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $A_x^2 = A_x \cdot A_x$.

5p **a)** Să se determine valorile reale ale numărului x pentru care $\det(A_x) = 0$.

5p **b)** Sa se determine numărul real x astfel încât $A_x^2 = I_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că $A_x^2 = 2xA_x + (1-x^2)\cdot I_2$.

2. Se consideră inelul de polinoame $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}_3$, știind că polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + aX + b$ are rădăcinile $\hat{1}$ și $\hat{2}$.

5p **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ la polinomul $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = X + \hat{1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = (a^3 + \hat{2}a)X^2 + \hat{2}aX + \hat{1}$, atunci $f(\hat{1}) = \hat{2}a + \hat{1}$.

① a) $\det(A_x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1$; $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

b) $A_x^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1 = 1 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

c) $2xA_x + (1-x^2)I_2 = \begin{pmatrix} 2x^2 & 2x \\ 2x & 2x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{pmatrix} = A_x^2$

② a) $f(\hat{1}) = f(\hat{2}) = \hat{0} \Rightarrow \begin{cases} \hat{1} + a + b = \hat{0} \\ 1 + \hat{2}a + b = \hat{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \hat{2} \\ 2a + b = \hat{2} \end{cases}$ $(-\hat{1} = \hat{2})$

$\begin{cases} a = \hat{0} \\ b = \hat{2} \end{cases}$

b)
$$\begin{array}{l|l} x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{2}x + \hat{1} & x + \hat{1} \\ \hline \underline{\hat{2}x^3 + \hat{2}x^2} & x^2 + x + \hat{1} \\ \ /\quad x^2 + \hat{2}x + \hat{1} & \\ \quad \underline{2x^2 + 2x} & \\ \quad\ /\quad x + \hat{1} & \\ \qquad \underline{\hat{2}x + \hat{2}} & \\ \qquad\ /\ \ / & \end{array}$$

$\begin{cases} q = x^2 + x + \hat{1} \\ r = \hat{0} \end{cases}$

c) $f(\hat{1}) = a^3 + \hat{2}a + \hat{2}a + \hat{1} = a^3 + a + \hat{1}$
$a^3 = a, \ \forall a \in \mathbb{Z}_3$
$\Rightarrow f(\hat{1}) = a + a + \hat{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{2}a + \hat{1}$

V095

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}$ și $C=A+B$.

Se notează cu $X^2=X\cdot X$

5p a) Să se efectueze produsul $A\cdot B$.

5p b) Să se calculeze $\det(A)\cdot\det(B)$.

5p c) Să se demonstreze că $A^2-B^2=6(A+B)$.

2. Pe mulțimea mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2$ și $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p a) Să se demonstreze că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$

5p b) Să se determine simetricul elementului $x=-3$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$".

5p c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases}x^2*y^2=7\\ x^2\circ y^2=16\end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{N}$.

① a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$

b) $\det(A)\cdot\det(B)=\begin{vmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{vmatrix}=0$

c) $A^2=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & -12 & -12\\ -12 & 24 & -12\\ -12 & -12 & 24\end{pmatrix}=6A$

$B^2=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 12 & 12\\ 12 & 12 & 12\\ 12 & 12 & 12\end{pmatrix}=-6B$

$A^2-B^2=6A-(-6B)=6(A+B)$

② a) $(x+2)(y+2)-2=xy+2x+2y+4-2=xy+2x+2y+2=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x\circ e=e\circ x=x$; $xe+2x+2e+2=x$; $e(x+2)+(x+2)=0$;
$(x+2)(e+1)=0 \Rightarrow e=-1$ elementul neutru al legii

$(-3)\circ x'=x'\circ(-3)=-1$; $-3x'-6+2x'+2=-1$; $-x'=3 \Rightarrow x'=-3$.
-3 simetricul lui -3 în raport cu legea „$\circ$"

c) $\begin{cases}x^2+y^2+2=7\\ x^2y^2+2x^2+2y^2+2=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=5\\ x^2y^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=1 \Rightarrow x=\pm1\\ y^2=4 \Rightarrow y=\pm2\end{cases}$ sau $\begin{cases}x^2=4 \Rightarrow x=\pm2\\ y^2=1 \Rightarrow y=\pm1\end{cases}$

$S:\{(1;2);(1;-2);(-1,2);(-1;-2)(-2;1);(-2;-1);(2;1);(2;-1)\}$

V096

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

5p 1. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix}$.

5p b) Să se calculeze valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+2=0$.

5p c) Fie matricele $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^3+A^2+A=O_3$, unde $A^2=A\cdot A$ și $A^3=A^2\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=2xy-8x-8y+36$.

5p a) Să se demonstreze că $x\circ y=2(x-4)(y-4)+4$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=36$.

5p c) Știind că operația „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}$.

① a) $\begin{vmatrix} \sqrt{2009}-1 & -1 \\ 1 & \sqrt{2009}+1 \end{vmatrix} = 2009-1+1=2009$

b) $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=2 \end{cases}$ $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=16-4=12$; $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2+x_2^2=12$

c) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A^3+A^2+A=O_3$

② a) $2(x-4)(y-4)+4=2xy-8x-8y+32+4=2xy-8x-8y+36=$
$=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $2(x-4)(x-4)+4=36 \Rightarrow 2(x-4)^2=32 \Rightarrow (x-4)^2=16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x-4=\pm4 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=8 \end{cases}$

c) $x\circ4=2(x-4)(4-4)+4=4,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\sqrt{1}\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{16}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}=4$ pt că $\sqrt{16}=4$ și $x\circ4=4,\ \forall x\in\mathbb{R}$

V097

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $X=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{X^n \mid n\in\{1,2,3\}\right\}$, unde $X^n=\underbrace{X\cdot X\cdot\ldots\cdot X}_{de\ n\ ori},\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se verifice că $X^3=I_3$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3+X+X^2\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $Y\in G$, atunci $Y^{-1}\in G$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-3b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $2+\sqrt{3}\in G$.

5p **b)** Să se arate că, în raport cu înmulțirea numerelor reale, orice element din mulțimea G are invers în G.

5p **c)** Să se demonstreze că $x\cdot y\in G$, pentru orice $x,y\in G$.

① a) $X^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$; $X^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

b) $I_3+X+X^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow \det(I_3+X+X^2)=0$

c) $X^3=I_3\Rightarrow I_3\in G$; $(X^3)^{-1}=I_3^{-1}=I_3\in G$

$X\cdot X^2=X^2\cdot X^3=I_3\Rightarrow X^{-1}=X^2\in G$ și $(X^2)^{-1}=X\in G$.

deci $Y^{-1}\in G,\ \forall Y\in G$.

② a) $\left.\begin{array}{l}a+b\sqrt{3}=2+\sqrt{3}\\ a=2;\ b=1;\ a^2-3b=1\end{array}\right\}\Rightarrow 2+\sqrt{3}\in G.$

b) $x\in G,\ x=a+b\sqrt{3};\ a^2-3b^2=1,\ a,b\in\mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=\frac{a-b\sqrt{3}}{1}=a+(-b)\sqrt{3}\\ a^2-3(-b)^2=a^2-3b^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{x}\in G,\ \forall x\in G.$

c) $x=a+b\sqrt{3};\ a^2-3b^2=1;\ y=c+d\sqrt{3};\ c^2-3d^2=1$

$xy=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}$

$(ac+3bd)^2-3(ad+bc)^2=a^2c^2+\cancel{6abcd}+9b^2d^2-3a^2d^2-\cancel{6abcd}-3b^2c^2=$

$=a^2(c^2-3d^2)-3b^2(c^2-3d^2)=a^2-3b^2=1\Rightarrow x\cdot y\in G,\ \forall x,y\in G.$

V098

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Se notează $X^2 = X\cdot X$.

5p a) Să se calculeze AB.

5p b) Să se demonstreze că $(A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$.

5p c) Să se calculeze inversa matricei $(A-B)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy+3x+3y+2$.

5p a) Să se demonstreze că $x*y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se determine numerele reale pentru care $(x^2-2)*5=-1$.

5p c) Știind că legea de compoziție este asociativă, să se calculeze $(-2009)*(-2008)*...*(-1)*0*1*...*2008*2009$.

① a) $AB=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1+1 & -2+1+1 & -2+1+1\\ 1-2+1 & 1-2+1 & 1-2+1\\ 1+1-2 & 1+1-2 & 1+1-2\end{pmatrix}=O_3$

b) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2=A^2+O_3+B^2=A^2+B^2$
$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2=A^2-O_3+B^2=A^2+B^2$ $\Rightarrow (A+B)^2=(A-B)^2=A^2+B^2$

c) $A-B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=3I_3$

$(A-B)^2=(3I_3)^2=9I_3^2=9I_3$; $I_3^{-1}=I_3$; $C=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$

$(A-B)^2=C$; $\det C=9^3$; $C^*=\begin{pmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{pmatrix}=81I_3$

$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot C^*=\frac{1}{9^3}\cdot 81I_3=\frac{1}{9}I_3$

② a) $3(x+1)(y+1)-1=3xy+3x+3y+3-1=3xy+3x+3y+2=x*y, \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $3(x^2-2+1)(5+1)-1=-1$; $18(x^2-1)=0$; $x^2-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$

c) $x*(-1)=3(x+1)(-1+1)-1=-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

$(-2009)\circ(-2008)*\cdots*(-1)*0*1*\cdots*2008*2009=-1$
pt că $x*(-1)=-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

V099

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}$ cu $x, y\in\mathbb{R}$.

5p a) Să se determine numărul real x astfel încât $A\cdot B=B\cdot A$.

5p b) Să se verifice că $A^2=4(A-I_2)$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p c) Să se determine numărul real a astfel încât $A^3-aA^2+4A=O_2$, unde $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legile de compoziţie $x\circ y=x+y+3$ şi $x*y=xy-3(x+y)+12$.

5p a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x\circ(x+1))+(x*(x+1))=11$.

5p c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x\circ(y-1)=0\\(x+1)*y=x*(y+1)\end{cases}$, cu $x, y\in\mathbb{R}$.

1) a) $AB=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&2y+12\\0&12\end{pmatrix}$ $\quad AB=BA \Rightarrow 2y+12=2x+2y$

$2x=12\Rightarrow \underline{x=6}$

$BA=\begin{pmatrix}x&y\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&2x+2y\\0&12\end{pmatrix}$

b) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\0&4\end{pmatrix}$

$4(A-I_2)=4\left[\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=4\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\0&4\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A^2=4(A-I_2)$

c) $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&8\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&24\\0&8\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}8&24\\0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4a&8a\\0&4a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&8\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-4a+16=0\\-8a+32=0\end{cases}\Rightarrow \underline{a=4}$

2) a) $(x-3)(y-3)+3=xy-3x-3y+9+3=xy-3(x+y)+12=x*y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x\circ(x+1)=x+(x+1)+3=2x+4$

$x*(x+1)=x(x+1)-3(x+x+1)+12=x^2+x-3x-3x-3+12=x^2-5x+9$

$(2x+4)+(x^2-5x+9)=11$; $\quad x^2-3x+2=0$

$\Delta=9-8=1$; $x_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}x_1=\underline{1}\\x_2=\underline{2}\end{cases}$

c) $x\circ(y-1)=x+(y-1)+3=x+y+2$

$(x+1)*y=(x+1)y-3(x+1+y)+12=xy+y-3x-3-3y+12=$

$=xy-3x-2y+9$

$x*(y+1)=x(y+1)-3(x+y+1)+12=xy+x-3x-3y-3+12=xy-2x-3y+9$

$\begin{cases}x+y+2=0\\xy-3x-2y+9=xy-2x-3y+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=-2\\-x+y=0\end{cases}$

$/\ 2y=-2 \Rightarrow y=-1$

$\begin{cases}x=\underline{-1}\\y=\underline{-1}\end{cases}$

V.100

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2=8A$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det X(a)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+8ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(1+X+X^3\right)^{670}-X^{2010}\in\mathbb{Z}[X]$ cu forma algebrică $f=a_{2009}X^{2009}+...+a_1X+a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)+f(-1)$.

5p **b)** Să se arate că suma $a_0+a_1+a_2+...+a_{2009}$ este un număr par.

5p **c)** Să se determine restul împărţirii polinomului f la X^2-1

① a) $A^2=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 64\\ 16 & 32\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}=8A$

b) $X(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4a & 8a\\ 2a & 4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4a & 8a\\ 2a & 1+4a\end{pmatrix}$

$\det X(a)=\begin{vmatrix}1+4a & 8a\\ 2a & 1+4a\end{vmatrix}=(1+4a)^2-2a\cdot 8a=1+8a+16a^2-16a^2=$
$=\underline{1+8a}$

c) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2^2+aI_2A+bI_2A+abA^2=$
$=I_2+aA+bA+ab\,8A=I_2+(a+b+8ab)A=X(a+b+8ab),$
$\forall a,b\in\mathbb{R}$

② a) $f(1)+f(-1)=\left[(1+1+1)^{670}-1^{2010}\right]+\left[(1-1-1)^{670}-(-1)^{2010}\right]=$
$=3^{670}-1+1-1=\underline{3^{670}-1}$

b) $a_0+a_1+a_2+...+a_{2009}=f(1)=(1+1+1)^{670}-1^{2010}=3^{670}-1$
3^{670} - impar $\Rightarrow 3^{670}-1$ - nr par $\Rightarrow a_0+a_1+...$
$...+a_{2009}$ - nr par

c) $f=(x^2-1)\cdot q+r$; $\text{grad}\, r<\text{grad}(x^2-1)\Rightarrow \text{grad}\, r=1\Rightarrow$
$\Rightarrow r=ax+b$

$f=(x-1)(x+1)q+ax+b$

$\begin{cases}f(1)=a+b\\ f(-1)=-a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3^{670}-1\\ -a+b=0\end{cases}$
$2b=3^{670}-1$

$\begin{cases}b=\dfrac{3^{670}-1}{2}\\ a=b=\dfrac{3^{670}-1}{2}\end{cases}$

$r=\dfrac{3^{670}-1}{2}x+\dfrac{3^{670}-1}{2}$